This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 1629.07

BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

SCIENCE CENTER LIBRARY

Kleine mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Statik I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper mit 82 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 178.

Statik II: Angewandte Statik mit 61 Figuren von Diplom-Ingenieur W. Hauber. Nr. 179.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 11.

Astrophysik mit 11 Abb. von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 91.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Sammlung Göschen

Vektoranalysis

Von

Dr. Siegfried Valentiner
Privatdozent für Physik an der Universität Berlin

Mit 11 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1907

math1829.07

HARVARD COLLEGE
JUL 6 1908
LIBRARY

Bowditch fund

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
	Literatur	6
	Einleitung	7
§ 1.	Analytische Darstellung der Resultante eines Kraftsystems	7
§ 2.	Geometrische Darstellung der Resultante	10

I. Teil.

Rechnungsregeln der Vektoranalysis.

§ 3.	Definition des Vektors und der skalaren Größe	13
§ 4.	Addition, Subtraktion von Vektoren, Multiplikation der Vektoren mit skalaren Größen	17
§ 5.	Zerlegung von Vektoren	20
§ 6.	Gleichungen zwischen Vektoren	22
§ 7.	Multiplikation von Vektoren	23
§ 8.	Skalares Produkt	25
§ 9.	Anwendungen	28
§ 10.	Vektorielles Produkt	30
§ 11.	Anwendung auf die Statik	34
§ 12.	Multiplikation von mehr als zwei vektoriellen Faktoren	36
§ 13.	Skalares Produkt eines polaren und eines axialen Vektors, oder $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$	36
§ 14.	Vektorprodukt eines polaren und eines axialen Vektors, oder $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]$	39
§ 15.	Produkte zweier axialer Vektoren	40
§ 16.	Division von Vektoren	42
§ 17.	Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe	46
§ 18.	Satz vom kleinsten Koppelmoment	51
§ 19.	Zentralbewegung	53
§ 20.	Differentiation einer Skalaren nach einer Skalaren in einer vorgegebenen Richtung	55

Seite

§ 21. Die Operation ∇ bei skalarem Argument . . . 58
§ 22. Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe in einer vorgegebenen Richtung 62
§ 23. Die Operation ∇ bei vektoriellem Argument . . 64
§ 24. Die skalare Operation ∇ bei vektoriellem Argument. Integralsatz von Gauß 66
§ 25. Anwendungen. Die Bezeichnung Divergenz . 69
§ 26. Die vektorielle Operation ∇. Die Rotation . . 71
§ 27. Satz von Stokes 74
§ 28. Anwendung 77
§ 29. Bewegung eines starren Körpers 80
§ 30. Trägheitsmomente und Eulersche Gleichungen . 82
§ 31. Mehrfache Anwendung der Differentialoperation ∇ 85

II. Teil.

Anwendungen in einigen physikalischen Gebieten.

§ 32. Einteilung 88

Kapitel 1.

Einige Sätze der Potentialtheorie.

§ 33. Bedeutung des Potentials in der Mechanik . . 90
§ 34. Newtonsches Potential 92
§ 35. Hilfssätze von Green 93
§ 36. Ableitung der Potentialfunktion aus den charakteristischen Bedingungen 95
§ 37. Deutung des ersten Gliedes der Lösung . . . 98
§ 38. Deutung des zweiten Gliedes der Lösung . . 101
§ 39. Deutung des dritten Gliedes der Lösung . . . 103

Kapitel 2.

Einige Sätze der Hydrodynamik.

§ 40. Einführung der Flächenkräfte 105
§ 41. Eulersche Gleichungen für reibungslose Flüssigkeiten 108
§ 42. Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegung 109
§ 43. Solenoidaler Vektor 112
§ 44. Flächenwirbel 115

Seite

Kapitel 3.

Einiges aus der Theorie der Elektrizität.

§ 45. Berechnung eines beliebigen Vektorfeldes . . . 118
§ 46. Elektromagnetische Gleichungen von Maxwell-Lorentz 120
§ 47. Biot-Savartsches Gesetz 123
§ 48. Elektrische Polarisation 125

III. Teil.

Lineare Vektorfunktionen und Dyadenrechnung.

§ 49. Lineare Vektorfunktionen 129
§ 50. Die Dyade 130
§ 51. Anwendung 133
§ 52. Die skalare und rotorische Dyade 137
§ 53. Benutzung der Dyaden bei den dreifachen Vektorprodukten 139
§ 54. Verbindungen der Dyaden mit Vektoren und Dyaden 141
§ 55. Reduktion der Dyadensummen auf ein und zwei Glieder 145
§ 56. Normalform der kompletten Dyade 148
§ 57. Spezielle Dyadenformen 152
§ 58. Anwendung auf die unendlich kleinen Verrückungen kontinuierlich verbreiteter Massen . 153
§ 59. Hauptdilatationsachsen. Reine Volumendilatation 156
§ 60. Anwendung auf die Differentialoperationen von Vektoren 160

Literatur.

Hamilton, Elemente der Quaternionen; deutsch von Glan. Leipzig 1884.

Tait, Elementares Handbuch der Quaternionen; deutsch von v. Scherff. Leipzig 1880.

Wilson, Vector Analysis, a text-book for the use of students of mathematics and physics, foundet upon the lectures of J. W. Gibbs. New York-London 1902.

Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. 2. Aufl. Band 1. Leipzig 1904.

Abraham, Geometrische Grundbegriffe. Encykl. d. mathem. Wiss. IV, 14. Leipzig 1901.

Timerding, Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Encykl. d. mathem. Wiss. IV, 2. Leipzig 1902.

Bucherer, Elemente der Vektoranalysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig 1905.

Gans, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig 1905.

Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkte aus dargestellt. Leipzig 1905.

Möbius, Der baryzentrische Kalkül, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbes. auf die Bildung neuer Klassen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet. Leipzig 1827.

Graßmann, Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. 2. Aufl. Leipzig 1878.

— Die Ausdehnungslehre. Berlin 1862.

Hyde, The directional calculus based upon the methods of Hermann Graßmann. Boston 1890.

Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Leipzig 1905.

Einleitung.

§ 1. Analytische Darstellung der Resultante eines Kraftsystems.

Die Vektoranalysis ist eine mathematische Disziplin, die sich in ihrem Aufbau fast so vollkommen an die Anschauung anlehnt, wie die Geometrie selbst; sie bildet ihre Begriffe und Schlüsse gerade denen der Geometrie nach. Inwiefern sie dadurch zu einer knapperen, übersichtlicheren und anschaulicheren Darstellung aller solcher Erfahrungen führt, welche auf den zwei- oder dreidimensionalen Raum sich beziehen, als die gewöhnliche Analysis, will ich in den ersten Paragraphen an einem Beispiel zeigen. Dasselbe ist zugleich geeignet, den Unterschied der beiden wesentlichen Begriffe in der Vektoranalysis: der skalaren Größe und des Vektors, hervortreten zu lassen.

Es mögen an einem freien, starren Körper an n Punkten $p_1 \ldots p_n$ die Kräfte $P_1 \ldots P_n$ angreifen. Ein solches System von Kräften läßt sich ersetzen durch eine resultierende Einzelkraft und eine Koppel, die von dem Angriffspunkt der Einzelkraft abhängig ist. Um Einzelkraft und Koppel zu finden, verfährt man analytisch folgendermaßen:

Es sei ein rechtwinkliges, willkürlich gelegenes, aber positives Koordinatensystem x, y, z zugrunde gelegt, d. h. ein solches, in welchem, von der positiven

x- (oder y- oder z-) Achse aus gesehen, eine Drehung der positiven y- (resp. z- oder x-) Richtung in die positive z- (resp. x- oder y-) Richtung entgegen der Bewegung des Uhrzeigers oder, wie man sagt, in positivem Sinn verläuft.

Die Lagen der Angriffspunkte seien durch die Koordinaten x_i, y_i, z_i bestimmt, die Kraftrichtungen durch die Richtungskosinus α_i, β_i, γ_i. Die Komponenten der Kräfte nach den Achsenrichtungen sind dann:

$$X_i = P_i \alpha_i, \quad Y_i = P_i \beta_i, \quad Z_i = P_i \gamma_i.$$

Wir fügen dem Kraftsystem X_i, Y_i, Z_i zwei neue Kraftsysteme hinzu, indem wir im Koordinatenanfangspunkt: 1. Kräfte X_i', Y_i', Z_i' angreifen lassen, die den gegebenen gleich sind, und 2. solche X_i'', Y_i'', Z_i'', die ihnen entgegengesetzt gleich sind, so daß an der Gesamtwirkung nichts geändert wird. Das erste der beiden neuen setzen wir nach dem Parallelogramm der Kräfte zu der Resultierenden zusammen:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

worin

$$X = \sum_1^n P_i \alpha_i, \quad Y = \sum_1^n P_i \beta_i, \quad Z = \sum_1^n P_i \gamma_i$$

sind. Dem Zusammenwirken des ursprünglichen Kraftsystems mit dem zweiten der beiden neuen entsprechen $3n$ Koppeln. Von diesen zerlegen wir die Koppel: Z_i, Z_i'' mit Hinzunahme der sich aufhebenden, an dem Punkt 0, y_i, 0 angreifenden Kräfte: $Z_i''' = Z_i$ und $Z_i'''' = -Z_i$ (Fig. 1) in die beiden Komponenten: Z_i'', Z_i''' und Z_i^0, Z_i''''. Dieselben suchen den Körper um die x- resp. die y-Achse zu drehen mit den Momenten:

$$Z_i y_i = P_i \gamma_i y_i \quad \text{resp.} \quad Z_i x_i = P_i \gamma_i x_i,$$

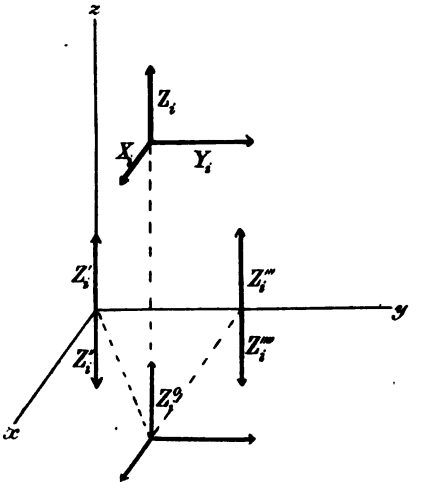

Fig. 1.

erstere im positiven, letztere im negativen Drehungssinn. Eine analoge Zerlegung nehmen wir mit den $3n-1$ übrigen Koppeln vor. Addieren wir hierauf alle, welche sich auf ein und dieselbe Drehungsachse beziehen, so gewinnen wir die drei Koppeln um je eine der Koordinatenachsen:

$$L = \sum_{1}^{n} (P_i \gamma_i y_i - P_i \beta_i z_i),$$

$$M = \sum_{1}^{n} (P_i \alpha_i x_i - P_i \gamma_i x_i),$$

$$N = \sum_{1}^{n} (P_i \beta_i x_i - P_i \alpha_i y_i).$$

Nach dem Satze vom Parallelogramm der Koppelmomente setzen diese sich zu der resultierenden Koppel:

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

zusammen, deren Drehungsachse durch die Richtungskosinus $\frac{L}{K}, \frac{M}{K}, \frac{N}{K}$ bestimmt ist.

§ 2. Geometrische Darstellung der Resultante.

Auf geometrischem Wege findet man resultierende Einzelkraft und Koppel ohne die Zerlegung in Komponenten durch wiederholte Anwendung der Sätze vom Parallelogramm der Kräfte und der Momente. Man denkt sich wieder zwei neue Kraftsysteme dem ursprünglichen $P_1 \dots P_n$ zugefügt, die dadurch gewonnen werden, daß man in einem und demselben Punkt Kräfte $P_1' \dots P_n'$ angreifen läßt, die den gegebenen parallel und gleich, und solche $P_1'' \dots P_n''$, die ihnen parallel und entgegengesetzt gerichtet sind. Das System $P_1' \dots P_n'$ setzt man durch geometrische Addition zu der Resultierenden R zusammen:

$$R = P_1'(+) \dots (+) P_n', \tag{1}$$

wo das Zeichen $(+)$ sich auf die geometrische Addition bezieht, bei der auch die Richtung der Kraft berücksichtigt werden muß. Die beiden anderen Kraftsysteme stellen ein System von Koppeln dar, deren Momente dem absoluten Betrage nach, d. h. abgesehen vom Richtungssinn, den Wert haben:

$$P_i r_i \sin(P_i r_i),$$

wenn r_i die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P_i von dem willkürlich gewählten Angriffspunkt der resul-

tierenden Einzelkraft bedeutet und nach dem Angriffspunkt der letzteren gerichtet ist, und wenn für den Winkel $(P_i r_i)$ immer der Wert gesetzt wird, der $< \pi$ ist. Die Größe dieser Momente tragen wir als Strecken von einem beliebig gewählten Punkt aus parallel der Drehungsachse nach der Richtung hin ab, daß die Drehungsrichtung der Koppel, von dieser Richtung aus betrachtet, positiv erscheint. Diese Strecken addieren wir geometrisch in gleicher Weise, wie vorher die Kräfte, und erhalten als resultierendes Koppelmoment:

$$K = [P_1 r_1 \sin(P_1 r_1)] (+) \ldots (+) [P_n r_n \sin(P_n r_n)].$$

Diesen Ausdruck können wir in eindeutiger Weise kürzer auch so schreiben:

$$(2) \qquad K = (P_1 r_1) (+) (P_2 r_2) (+) \ldots (+) (P_n r_n),$$

wenn wir unter $(P_i r_i)$ eine Strecke verstehen, deren absoluter Betrag gleich ist dem Produkt: $P_i r_i \sin(P_i r_i)$, und welche senkrecht zu der Ebene P_i, r_i nach der Seite der Ebene gerichtet ist, daß der kürzeste Übergang der Richtung P_i in die Richtung r_i, von der Strecke $(P_i r_i)$ aus gesehen, einer positiven Drehung entspricht.

Die Gleichungen (1) und (2) geben eine symbolische Darstellung der geometrischen Konstruktion. Während man in der analytischen Darstellung nur Größen gleicher Richtung, die Komponenten, addiert, hat man es hier mit einer Addition von Gliedern zu tun, welche sich nicht allein durch ihre Größe, ihren absoluten Betrag, sondern auch durch ihre Richtung voneinander unterscheiden, mit welchen also nur unter Rücksichtnahme auf ihre Richtung gerechnet werden darf. Zum Unterschied zu den reinen Zahlen, den skalaren Größen, bezeichnet man solche Glieder, welche sich von ihres-

gleichen durch Größe und Richtung unterscheiden können, als gerichtete Größen oder Vektoren. Können nun diese Symbole auch zur Beschreibung anderer geometrischer Konstruktionen oder gar physikalischer Erfahrungen benutzt werden und lassen sich einfache analytische Rechnungsregeln für dieselben angeben, die nicht für jeden weiteren Schluß eine Übertragung der Symbole in die gewöhnliche analytische Schreibweise erfordern, so scheinen sie eine brauchbare und infolge der Anlehnung an die Geometrie beträchtlich einfachere Beschreibung liefern zu können, als die rein algebraisch analytische Ausführung. In der Tat ist man aber imstande gewesen, eine Reihe von Rechnungsregeln abzuleiten, die den Regeln der gewöhnlichen Analysis mit skalaren Größen analog sind. Der Ableitung dieser Regeln, welche die notwendige Grundlage der Darstellungsmethode durch Vektoren bildet, ist der erste Teil dieses Bändchens gewidmet. Zur Übung in der Handhabung der Rechnungsregeln werden im zweiten Teil einige Anwendungen aus physikalischen Gebieten besprochen. Endlich soll im dritten Teil auf eine in neuester Zeit begonnene Erweiterung der Vektorrechnung, die Dyadenrechnung, eingegangen werden.

Als die eigentlichen Begründer der Vektorrechnung sind Graßmann und Hamilton zu nennen, die nahezu gleichzeitig und ganz unabhängig voneinander den Vektorbegriff in die analytische Rechnung einführten, wenn auch in jener Zeit (um 1844) Ansätze zu dieser Methode von anderen versucht wurden oder schon vorhanden waren, wie in dem baryzentrischen Kalkül von Möbius (1828). Mehr aber als alle anderen waren sich jene beiden der Bedeutung der neuen Methode bewußt. Die Gesichtspunkte, von denen sie ausgingen, sind außerordentlich verschieden, indem Hamilton sich mehr der Geometrie anschloß, während Graßmann die Geometrie nur dazu verwenden wollte, anschauliche Beispiele für seine um-

fassender angelegte Theorie zu gewinnen. Seine Sätze sollen keine bloße Übertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache sein, sondern durch Erweiterung auf mehr als dreidimensionale Gebilde eine allgemeine Bedeutung gewinnen. Man unterscheidet dementsprechend zwei Richtungen in der Darstellungsweise der Vektorrechnung, die sich aber in den Anwendungen auf die Geometrie oder physikalische Beschreibung aufs engste berühren und zum Teil ergänzen.

I. Teil.
Rechnungsregeln der Vektoranalysis.

§ 3. Definition des Vektors und der skalaren Größe.

Wir nannten in § 2 die resultierende Einzelkraft, sowie das resultierende Koppelmoment, die geometrisch als gerichtete Strecken abgebildet werden können, Vektoren. Zur völligen Bestimmung der als erste Beispiele angeführten Vektoren sind drei Angaben, entsprechend den Komponenten in der analytischen Darstellung, hinreichend und notwendig. Drei solche Angaben sind: die Länge des Vektors und die durch zwei Winkel gegen feste Achsen bestimmte Richtung. Da es also nur auf die Größe und Richtung der den Vektor darstellenden Strecke ankommen kann, so ist die Darstellung unabhängig von der Lage des Anfangspunktes der Strecke. Soll daher z. B. die Einzelkraft R mit den Komponenten X, Y, Z, die im Punkt x, y, z eines durch Achsen festgelegten Raumes „A“ angreift, in dem dreidimensionalen Bildraum „B“ durch eine Strecke dargestellt werden, so ist die Darstellung insofern auf unendlich vielfache Weise möglich (die Darstellung also unendlich vieldeutig), als der

Anfangspunkt der darstellenden Strecke mit dem willkürlich gewählten Koordinatenanfangspunkt des Bildraumes „B“ zusammenfallen kann oder nicht. In dem Bildraum sind also parallele gleichgerichtete und gleichgroße Strecken bezüglich ihrer Bedeutung für das dargestellte Objekt völlig äquivalent.

Wir setzen daher als Definition des Vektors fest:

Eine Größe soll Vektor genannt werden, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise der Gesamtheit der Strecken im Raum zugeordnet werden kann, die von einem willkürlich gewählten Anfangspunkt ausgehen[1]).

Vektoren sind danach außer den genannten, der Kraft und dem Koppelmoment, z. B. die folgenden Größen: Verrückung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Strömung.

Bei den genannten Größen ist kein Zweifel, daß sie definitionsgemäß als Vektoren anzusprechen sind. Es muß indessen noch auf eine andere Gruppe von Vektoren hingewiesen werden, bei denen die Berechtigung des Namens Vektor nicht sofort erkannt werden könnte.

Der absolute Betrag des Koppelmomentes, d. h. die Größe ohne Bezugnahme auf die Richtung,

$$P_i r_i \sin(P_i, r_i),$$

kann aufgefaßt werden als der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten P_i, r_i und dem Winkel $\varphi = (P_i, r_i)$. Als Richtung des das Koppelmoment darstellenden Vektors wurde bei der geometrischen Addition in § 2 die Nor-

[1]) Diese Definition ist der von M. Abraham u. A. Föppl (Theorie d. Elektrizität, 2. Aufl. **1**, S. 5) gegebenen nachgebildet.

malenrichtung auf die durch P_i und r_i gelegte Ebene benutzt. Wir können danach ein Parallelogramm von bestimmter Größe und gegebener Normalenrichtung ebenfalls als einen Vektor ansehen. Es gehören also unter die oben definierten Vektoren auch solche Größen, die vorgestellt werden können als durch den Anfangspunkt gehende, beliebig begrenzte, ebene Flächenstücke.

Endlich ist noch eine dritte Gruppe von Vektoren hervorzuheben, nämlich solche Größen, die unter dem Bilde von unbegrenzten, nicht durch den Anfangspunkt gehenden Ebenen betrachtet werden können. Die Größe und Richtung dieser Vektoren ist offenbar eindeutig definiert durch Größe und Richtung der vom Anfangspunkt auf die Ebene gefällten Normalen.

Es besteht aber ein prinzipieller Unterschied zwischen den ursprünglich ins Auge gefaßten Vektoren und den beiden hervorgehobenen Gruppen.

Wenn man von einem Koordinatensystem mit den Achsen x, y, z zu einem anderen übergeht, welches entgegengesetzt gerichtete Achsen hat[1]), so daß also die Koordinaten des Punktes x, y, z im zweiten die Werte $-x$, $-y$, $-z$ besitzen, so muß auch die Kraft P bei dieser Transformation in die Kraft $-P$ übergehen. Dagegen wird der das Koppelmoment darstellende Vektor sein Zeichen nicht ändern, wenn wir, wie in § 1 und 2, dem Moment stets das positive Zeichen beilegen, wenn die Drehung von der positiven Seite der Drehungsachse aus gesehen positiv, d. h. entgegen der Uhrzeigerbewegung gerichtet ist.

Man nennt Vektoren, die ihr Vorzeichen bei der ge-

[1]) Ein solches würde nach der Bemerkung auf Seite 7 als negatives zu bezeichnen sein.

nannten Transformation ändern, polare Vektoren, solche, die es behalten, axiale Vektoren [1]).

Die Abhängigkeit des Vektors vom Ort oder von der Zeit muß natürlich auf den Bildraum selbst oder die in demselben abbildenden Strecken übertragen werden.

Ist in einem Gebiet jedem Punkt ein beliebiger, im allgemeinen stetig mit dem Ort sich ändernder Wert eines Vektors zugeordnet, so nennt man dies Gebiet ein Vektorfeld und spricht in diesem Sinn von Kraftfeld, Momentenfeld, Geschwindigkeitsfeld usw.

Im Gegensatz zu den Vektoren stehen die Größen, zu deren vollständiger Bestimmung nur eine Angabe, der absolute Betrag, notwendig ist, weil ihrem Begriff jede Beziehung zu einer Richtung im Raum fehlt. Als Beispiele solcher Größen, der sogenannten Skalaren, sind an erster Stelle die absoluten Beträge der Vektoren zu nennen, d. h. die Längen der Vektoren ohne Rücksicht auf ihre Richtung. Andere derartige Größen, die durch Angabe einer sich auf ein bestimmtes Maßsystem beziehenden Zahl vollständig bestimmt werden, sind die Temperatur, die Zeit, die Verhältnisse gleichgerichteter Vektoren usf.

Wir nennen eine Größe einen Skalar, wenn die Gesamtheit der verschiedenen Werte, die sie annehmen kann, in stetiger, umkehrbar eindeutiger Weise einer Reihe reeller Zahlen zugeordnet werden kann.

Um im folgenden durch den Anblick der Zeichen schon erkennen zu lassen, ob eine Größe Vektor oder Skalar ist, wollen wir, wie es üblich ist, die Vektoren

[1]) Die Bezeichnung stammt von W. Voigt. Maxwell (Treatise on electricity and magnetism, London 1873, 1, art. 15) bezeichnet die Vektoren als translatorisch und rotatorisch. Wiechert (Ann. Phys. u. Chem. 59, 1896 S. 287) nennt sie Vektoren und Rotoren.

stets mit deutschen kleinen oder großen Buchstaben bezeichnen, die skalaren Größen durch lateinische. Den absoluten Betrag eines Vektors und den Vektor selbst werden wir stets durch gleichlautende Buchstaben angeben.

§ 4. Addition, Subtraktion von Vektoren, Multiplikation der Vektoren mit skalaren Größen.

Zwei beliebig gerichtete Strecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (Fig. 2) im Raum werden addiert, indem man den Anfangspunkt der zweiten Strecke an den Endpunkt der ersten verschiebt und die Verbindungslinie vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der zweiten zieht. Diese Verbindungslinie OC, die Summe der beiden Strecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, ist die vom willkürlich gewählten Anfangspunkt O ausgehende Diagonale des Parallelogramms $OACB$, dessen zwei an den Anfangspunkt der Diagonale stoßende Seiten die von dem Punkte O aus beginnenden Strecken sind.

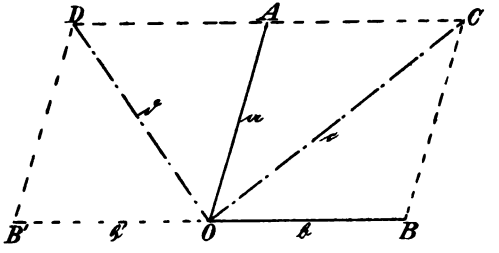

Fig. 2.

Da die Vektoren, wie aus der Definition hervorgeht, formal mit den Strecken identisch sind, werden Vektoren addiert wie Strecken. Wir wählen als Operationszeichen für die Addition von Vektoren das algebraische Additions-

zeichen +, indem wir jedes Mißverständnis durch die Anwendung der deutschen Buchstaben für Vektoren vermeiden können. In Fig. 2 ist

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}. \tag{1}$$

Die Differenz zweier Vektoren ist nichts anderes als die Summe des ersten und des in entgegengesetzter Richtung genommenen zweiten Vektors, also darstellbar durch die von O ausgehende Diagonale des Parallelogramms $OADB'$, dessen an O anstoßende Seiten der erste Vektor und der nach entgegengesetzter Richtung gezeichnete zweite Vektor, also $-\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, sind. Oder es ist also

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{d}. \tag{2}$$

Die beiden Diagonalen des aus den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Parallelogramms stellen nach Größe und Richtung die Summe resp. die Differenz der zwei Vektoren dar.

Die Differenz zweier Vektoren ist Null, die Vektoren also einander gleich, wenn sie gleiche Größe und gleiche Richtung haben.

Aus der Anschauung ergibt sich sofort, daß es auf die Reihenfolge der Glieder bei der Addition nicht ankommt, daß also

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1$$

ist, d. h. das kommutative Gesetz Gültigkeit besitzt.

Die Summe mehrerer Vektoren $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ wird gewonnen durch Addition des dritten zu der Summe der ersten beiden, des vierten zu der Summe der ersten drei usw. Da es wieder auf die Reihenfolge nicht ankommt, so kann auch die Gruppierung geändert werden, d. h. es gilt außer dem kommutativen Gesetz auch das assoziative:

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + \mathfrak{a}_3 + \ldots = \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) + \ldots$$

Beispiel. Gleichung (1) können wir schreiben:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} - \mathfrak{c} = 0 ,$$

oder wenn wir setzen: $-\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = 0 .$$

Fassen wir die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ als Kräfte auf, so haben wir den bekannten Satz:

Lassen sich Kräfte, die an einem Punkt angreifen, der Größe und Richtung nach durch solche Strecken darstellen, die durch parallele Verschiebung sich zu einem geschlossenen Polygon zusammensetzen lassen, so halten sie sich das Gleichgewicht.

Addieren wir m gleiche (d. h. gleichgroße und gleichgerichtete) Vektoren, so erhalten wir einen Vektor von gleicher Richtung und der m-fachen Länge. Ist der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ gleich a,

$$|\mathfrak{a}| = a ,$$

so stellt $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ einen Vektor von gleicher Richtung wie $\mathfrak{a}$ und dem absoluten Betrag 1 dar. Man nennt einen solchen Vektor einen Einheitsvektor. Im allgemeinen ist also ein Vektor das Produkt einer skalaren Größe in einen Einheitsvektor. Für diese skalare Multiplikation gilt, wie aus der Anschauung hervorgeht, ebenfalls wie bei der Addition das kommutative und assoziative Gesetz.

Wir wollen festsetzen, daß die Einheitsvektoren als dimensionslose Größen anzusehen sind. Die Dimension legen wir dem absoluten Betrage bei, der Einheitsvektor gebe allein die Richtung an. Ist z. B. die Geschwindigkeit einer Kugel 400 m pro sec, und hat sie die durch die Winkel φ und ϑ gegen feste Achsen bestimmte Richtung, so sagen wir, daß der Einheitsvektor vom absoluten Betrage 1 die Richtung (φ, ϑ) dieser Geschwindigkeit angibt, während der absolute Betrag der Geschwindigkeit 400 m/sec ist.

Um durch die Schreibweise sofort erkennen zu lassen, daß ein Vektor ein Einheitsvektor sein soll, wollen wir die Einheitsvektoren durch einen horizontalen Strich über dem Buchstaben markieren, z. B. $\bar{a}$.

§ 5. Zerlegung von Vektoren.

Um die Richtung eines Vektors oder der ihn darstellenden Strecke angeben zu können, müssen wir die Lage auf zwei willkürlich gewählte Richtungen in dem Bildraum beziehen.

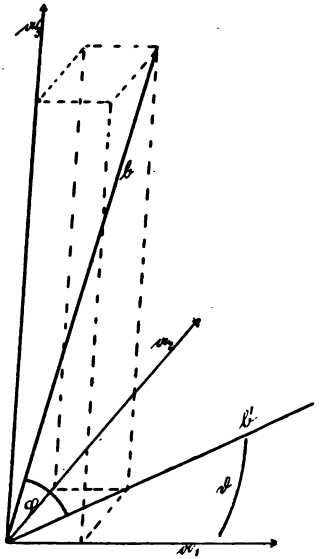

Fig. 3.

Wir legen zwei solche Richtungen durch die beiden Einheitsvektoren $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ fest. Dann ist die Richtung eines Vektors $\mathfrak{b}$ gegeben durch den Winkel φ zwischen $\mathfrak{b}$ und einer recht- oder schiefwinkligen Projektion $\mathfrak{b}'$ in der Ebene $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ und durch den Winkel ϑ dieser Projektion gegen einen der beiden Vektoren $\bar{a}_1$ oder $\bar{a}_2$. Zur völligen Bestimmung des Vektors $\mathfrak{b}$ gehört noch die Angabe des absoluten Betrages. (Fig. 3.)

An Stelle dieser drei Angaben $(\varphi, \vartheta, |\mathfrak{b}|)$ können wir drei Vektoren wählen. Außer den Richtungen $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ sei eine dritte $\bar{a}_3$ gegeben, die mit $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ nicht

komplanar (in eine Ebene fallend) sein soll. Sie bilde mit der Ebene $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ gerade den Winkel, unter dem die Projektion von $\bar{b}$ in die Ebene $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ vorgenommen wurde. Durch den Endpunkt von $\bar{b}$ lassen sich drei Ebenen legen, die den Ebenen: $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$; $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$; $\bar{a}_3$, $\bar{a}_1$ parallel sind. $\bar{b}$ ist dann die Diagonale eines Rhomboeders, dessen Kanten den drei Achsen parallel sind und sich daher durch die mit skalaren Größen multiplizierten drei Einheitsvektoren $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ ausdrücken lassen. Nach § 4 ist aber diese Diagonale gleich der Summe der drei Seiten. Daraus geht hervor, daß ein Vektor sich durch drei nicht komplanare, willkürlich vorgelegte Einheitsvektoren vollständig bestimmen läßt — durch zwei dann und nur dann, wenn der Vektor in die Ebene der beiden Einheitsvektoren fällt (Bedingung der Komplanarität dreier Vektoren) — durch einen dann und nur dann, wenn der Vektor in die Richtung des Einheitsvektors fällt (Bedingung der Kollinearität). Man nennt die drei Projektionen die Komponenten des Vektors und sagt:

Zur vollständigen Bestimmung des Vektors $\bar{b}$ im Raume ist hinreichend und notwendig die Angabe von Komponenten des Vektors in drei willkürlich vorgegebenen, nicht komplanaren Richtungen.

Ein spezieller Fall hiervon ist die Angabe des Vektors durch Komponenten in drei zueinander senkrechten Richtungen, die Darstellung des Vektors in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Die Einheitsvektoren in Richtung dreier willkürlich gewählter, rechtwinklig zueinander stehender Achsen sollen stets durch die drei Buchstaben $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ wiedergegeben werden (resp., wenn mehrere derartige Achsensysteme in einer Entwicklung vorkommen, durch $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{i}''$ usw.).

Jeder Vektor ist also in der Form darstellbar:

$$\mathfrak{b} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$

wo x, y, z skalare Größen bedeuten.

§ 6. Gleichungen zwischen Vektoren.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich die folgenden Sätze:

1. Zwei Vektoren sind einander gleich dann und nur dann, wenn die sie definierenden drei Bestimmungsstücke paarweise einander gleich sind. Eine lineare Gleichung zwischen Vektoren ist somit drei Gleichungen zwischen skalaren Größen, d. h. drei gewöhnlichen algebraischen Gleichungen, äquivalent.

2. Die Gleichung:

$$\mathfrak{a}_1 = x\,\mathfrak{a}_2 + y\,\mathfrak{a}_3$$

ist bei variablem x und y die vektoranalytische Darstellung einer Ebene, die die beiden Vektoren $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ enthält, denn sie stellt das Ensemble aller in dieser Ebene liegenden Geraden dar.

$$\mathfrak{a}_1 = x\,\mathfrak{a}_2 + y\,\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4$$

ist die Gleichung einer Ebene, die den Vektoren $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ parallel ist und durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}_4$ geht.

3. Ferner ist

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 + x\,\mathfrak{a}_3$$

der Ausdruck einer zu $\mathfrak{a}_3$ parallelen, durch den Endpunkt von $\mathfrak{a}_2$ hindurchgehenden Geraden.

4. Die Endpunkte von drei (resp. vier) von demselben Ausgangspunkt ausgehenden Vektoren liegen in einer Geraden (resp. Ebene), wenn zwischen den drei (resp. vier) Vektoren eine lineare Gleichung existiert, in der die Summen aller Vektorkoeffizienten zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich sind.

Denn liegt der Endpunkt von $\mathfrak{a}_1$ auf der Geraden durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ (resp. in der Ebene durch die von $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$), so gilt:

$$x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_3$$

$$\text{resp.} \quad x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4) + y(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_4) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4 .$$

In diesem Lehrsatz lassen sich Haupt- und Nebensatz miteinander vertauschen.

Beispiel. Die Diagonale eines Parallelogramms wird im Verhältnis von $n : 1$ durch die Verbindungslinie einer Ecke mit dem $(n-1)$ten Teil der Gegenseite geteilt.

In Fig. 4 sei

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{n-1}\mathfrak{a}_2$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{x}\mathfrak{b}_1 .$$

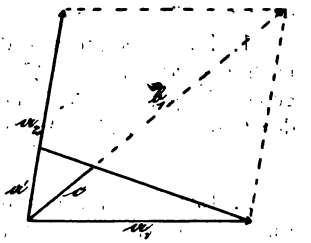

Fig. 4.

Nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

oder

$$x\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1 + (n-1)\,\mathfrak{a}'.$$

Da der Endpunkt von $\mathfrak{c}$ so gewählt werden soll, daß er auf der Geraden durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}'$ liegt, so muß nach dem eben ausgesprochenen Satz

$$x = 1 + (n-1) = n$$

sein, was zu beweisen war.

§ 7. Multiplikation von Vektoren.

Die Multiplikation skalarer Größen untereinander oder mit Vektoren folgt den Regeln der gewöhnlichen Algebra (vgl. § 4), es gilt das assoziative und kommutative Gesetz, d. h. es ist

$$m\,(n\,\mathfrak{a}) = n\,(m\,\mathfrak{a}) = (m\,n)\,\mathfrak{a}\,,$$

wie auch das distributive Gesetz, d. h. es ist

$$m\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = m\,\mathfrak{a} + m\,\mathfrak{b}$$

und

$$(m + n)\,\mathfrak{a} = m\,\mathfrak{a} + n\,\mathfrak{a}\,.$$

Die Multiplikation von Vektoren untereinander folgt anderen Regeln. Um diese abzuleiten, gehen wir von der Erfahrung aus. Wir kennen nämlich in einigen Fällen das Produkt von Vektoren; wenn wir in diesen das Typische heraussuchen, müssen wir allgemein gültige Gesetze erhalten.

1. Das Produkt aus der der Größe und Richtung nach gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ in die in gleicher Weise gegebene Wegstrecke $\mathfrak{s}$, längs welcher sie wirkt, bestimmt der Größe nach eine Arbeit:

$$A = Ps\cos(\mathfrak{P}, \mathfrak{s}) .$$

2. Das Produkt aus einer Kraft $\mathfrak{P}$, die an einem Punkt eines um eine Achse drehbaren Körpers angreift, in den Hebelarm $\mathfrak{r}$ bestimmt der Größe und Richtung nach ein Koppelmoment $\mathfrak{M}$; der absolute Betrag desselben ist

$$M = Pr\sin(\mathfrak{P}, \mathfrak{r}) .$$

Die Richtung ist senkrecht zur Ebene $\mathfrak{P}, \mathfrak{r}$ und zwar so, daß die kürzeste Drehung der Kraftrichtung in die Richtung: Angriffspunkt → Drehpunkt, von der positiven Seite der Drehungsachse gesehen, entgegen dem Sinn des Uhrzeigers verläuft, in Übereinstimmung mit der Festsetzung in § 2.

Aus dem 1. Beispiel folgt:

Das Produkt zweier Vektoren kann eine skalare Größe sein, deren Betrag gleich ist dem Produkt der absoluten Beträge der zwei Vektoren, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen den beiden Richtungen der Vektoren, oder gleich dem Produkt des absoluten Betrages des einen Vektors in die Projektion des anderen auf die Richtung des ersteren.

Aus dem 2. Beispiel folgt:

Das Produkt zweier Vektoren kann einen neuen Vektor darstellen, dessen absoluter Betrag gleich dem Flächen-

inhalt des aus den Vektoren als Seiten gebildeten Parallelogramms ist, und dessen Richtung senkrecht auf der Ebene der beiden Vektoren steht und nach der Seite zeigt, daß für einen, der in dieser Richtung steht, die kürzeste Drehung des bei Angabe des Produktes zuerst genannten Vektors in die Richtung des anderen entgegen dem Sinn des Uhrzeigers verläuft.

Es sind also jedenfalls diese beiden Arten von Produkten zweier Vektoren zu unterscheiden. Auf die Fragen, ob noch andere Arten von Verbindungen zweier Vektoren, die Produkte genannt werden können und für die Rechnung von Wichtigkeit sind, abgeleitet werden können, und welche Bedeutung sie im Fall ihrer Existenz in der Anwendung gewinnen, werden wir an anderer Stelle eingehen (vgl. Teil III).

Das erste Produkt bezeichnet man als skalares Produkt[1]) und benutzt dafür die symbolische Schreibweise $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ oder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$; das zweite führt den Namen vektorielles Produkt oder Vektorprodukt[2]) und das Symbol $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ oder $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ oder $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

§ 8. Skalares Produkt.

Aus der Definition des skalaren Produktes:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

[1]) Die Bezeichnung geht auf Hamilton zurück, er benutzte für den negativ genommenen Betrag das Symbol:

$$S\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = -|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b});$$

Graßmann nannte dasselbe inneres Produkt und schrieb $[\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b}]$; Gibbs spricht von einem „direct product“ oder „dot product“, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ oder $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; Heaviside schreibt $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.

[2]) Graßmann: äußeres Produkt, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$; Hamilton: vektorieller Teil des Quaternionenproduktes, $V\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$; Gibbs: Vektorprodukt oder „skew product“ oder „cross product“, $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

folgt unmittelbar die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,, \tag{1}$$

da $\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ ist.

Für die Multiplikation mit skalaren Größen besteht das distributive Gesetz, es ist

$$(x\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = x\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = x\,|\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\cdot\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,,$$

da das distributive Gesetz für die Multiplikation der absoluten Beträge nach den Regeln der Algebra Gültigkeit besitzt. Endlich ergibt sich aus der Definition des skalaren Produktes und der Tatsache, daß die Summe der Projektionen von Strecken auf eine Strecke gleich der Projektion der Summe der Strecken ist, die Identität:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,,$$

welche das distributive Gesetz für die skalare Multiplikation darstellt.

Das skalare Produkt eines Vektors in einen Einheitsvektor ist nichts anderes als die Projektion des Vektors auf die Richtung des Einheitsvektors. Daraus folgen wichtige Anwendungen. Das skalare Produkt zweier Einheitsvektoren ist der Kosinus des Winkels zwischen ihren Richtungen. Es ist Null, wenn sie senkrecht aufeinander stehen.

Um nicht in Widerspruch mit der definitionsmäßig geforderten Regel der Algebra zu treten, nach welcher ein Produkt nur verschwinden kann, wenn einer der Faktoren Null ist, müssen wir uns immer daran erinnern, daß das Zeichen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Symbol ist und nicht das Produkt der beiden Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern das Produkt der einen in die Projektion der anderen auf die erste darstellt.

Die Gleichung:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 0 \tag{2}$$

zwischen zwei Vektoren von endlichem Betrag ist somit der Ausdruck dafür, daß die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Fallen die Richtungen der Vektoren zusammen, so ist das skalare Produkt der Vektoren gleich dem Produkt der absoluten Beträge. Im besonderen ist

$$\mathfrak{a}^2 = a^2. \tag{3}$$

Hieraus folgen für die zueinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren die Beziehungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{i}\,\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{k} = 1\,, \\ \mathfrak{i}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{i} = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Sind die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ausgedrückt,

$$\begin{cases} \mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}\,, \\ \mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{i} + b_2\,\mathfrak{j} + b_3\,\mathfrak{k}\,, \end{cases} \tag{5}$$

so kann auf Grund der Gleichungen (4) und der Gültigkeit des distributiven Gesetzes für die Multiplikation mit skalaren Größen das Produkt geschrieben werden:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \tag{6}$$

und

$$\mathfrak{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3\,.$$

Der absolute Betrag a eines Vektors $\mathfrak{a}$ kann also durch die Komponenten folgendermaßen dargestellt werden:

$$|\mathfrak{a}| = a = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,. \tag{7}$$

Durch Multiplikation der Gleichung (5_1) mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{i}$, resp. $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, erhalten wir:

$$\begin{cases} a_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{i} = a\cos(\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{i})\,, \\ a_2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{j} = a\cos(\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{j})\,, \\ a_3 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{k} = a\cos(\mathfrak{a}\,,\,\mathfrak{k})\,, \end{cases} \tag{8}$$

woraus die Bedeutung dieser skalaren Komponenten als der mit dem absoluten Betrag des Vektors multiplizierten Richtungskosinus zu erkennen ist.

Sind die Vektoren durch drei nicht in einer Ebene liegende, schiefwinklig zueinander stehende Vektoren $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ausgedrückt:

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{l} + a_2\,\mathfrak{m} + a_3\,\mathfrak{n}\,,$$
$$\mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{l} + b_2\,\mathfrak{m} + b_3\,\mathfrak{n}\,,$$

so nimmt das Produkt die Form an:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + (a_1\,b_2 + b_2\,a_2)\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{l} \\ \qquad\qquad + (a_2\,b_3 + b_2\,a_3)\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{m} + (a_3\,b_1 + b_3\,a_1)\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{n}\,. \end{cases}$$

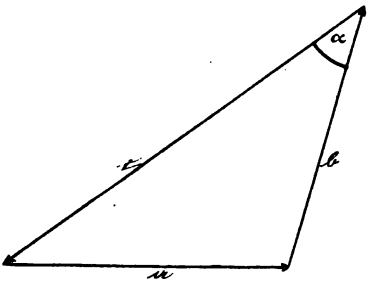

Fig. 5.

§ 9. Anwendungen.

1. In nebenstehendem Dreieck (Fig. 5) ist

$$(1)\qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0\,,$$

also

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + 2\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2\,;$$

in die Sprache der gewöhnlichen Analysis übersetzt ist das der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(180 - \alpha) = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha\,.$$

2. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (8) des vorigen Paragraphen ergibt Gleichung (6) den bekannten Satz:

$$\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{a},\mathfrak{i})\cos(\mathfrak{b},\mathfrak{i}) + \cos(\mathfrak{a},\mathfrak{j})\cos(\mathfrak{b},\mathfrak{j}) + \cos(\mathfrak{a},\mathfrak{k})\cos(\mathfrak{b},\mathfrak{k}) .$$

3. Multiplizieren wir Gleichung (1) mit dem Einheitsvektor von $\mathfrak{a}$, so kommt:

$$-a = b\cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}) + c\cos(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) ,$$

eine bekannte Dreiecksformel.

4. Die Additionstheoreme der Trigonometrie gewinnt man auf folgende Weise (Fig. 6).

Die beiden Vektoren

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} ,$$
$$\mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{i} + b_2\,\mathfrak{j}$$

mögen mit der Vektorrichtung $\mathfrak{i}$ die Winkel α und β bilden; es sei vom Koordinatenanfangspunkt außerdem der Vektor

$$\mathfrak{c} = a_1\,\mathfrak{i} - a_2\,\mathfrak{j}$$

abgetragen, dann ist Winkel $(\mathfrak{c}, \mathfrak{i})$ gleich Winkel $(\mathfrak{a}, \mathfrak{i})$, dessen Kosinus gleich $\frac{a_1}{a}$ ist, da $c = a$. Nun ist

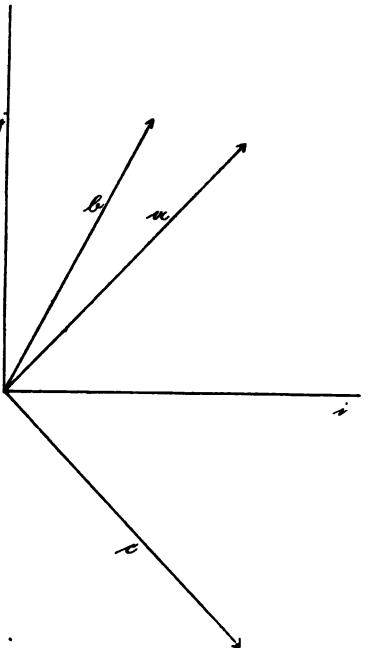

Fig. 6.

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$
$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} = a_1 b_1 - a_2 b_2 ,$$

folglich:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\,\mathfrak{b} = 2\,a_1 b_1 ,$$

oder nachdem durch die absoluten Beträge: $a\,b = c\,b$ dividiert ist:

$$\cos(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \alpha) = 2\cos\alpha\cos\beta\,.$$

Entsprechend folgt:

$$\cos(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha) = 2\sin\alpha\sin\beta\,.$$

5. In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der doppelten Summe der Quadrate der nicht parallelen Seiten:

$$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2,$$

$$\mathfrak{b}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2,$$

$$\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{b}^2 = 2\,(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)\,;$$

ferner:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{b}^2 = 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,.$$

§ 10. Vektorielles Produkt.

Das zur Ableitung der Definition gewählte Beispiel zeigt, wie die Definition selber, daß wir die früher mit axial bezeichneten Vektoren als Produkte zweier polarer Vektoren auffassen können und umgekehrt, wenn freilich auch aus der Angabe dieses axialen Vektors noch nicht die beiden polaren Vektoren eindeutig bestimmt sind.

Die Definition des Vektorproduktes lautet in vektoranalytischer Schreibweise:

$$(1) \qquad \mathfrak{c} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = a\,b\sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,\bar{\mathfrak{c}}\,,$$

wenn $\bar{\mathfrak{c}}$ ein Einheitsvektor senkrecht zu der Ebene der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und so gerichtet ist, daß für diese Richtung die kürzeste Drehung des Vektors $\mathfrak{a}$ in die Richtung $\mathfrak{b}$ in dem früher definierten Sinn positiv genannt werden kann; $\mathfrak{c}$ bestimmt der Größe und Richtung nach ein Parallelogramm und ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ polare Vektoren sind, ein axialer Vektor.

Da

$$\sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = -\sin(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}),$$

so gilt für dieses Produkt nicht das kommutative Gesetz, es ist

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]. \tag{2}$$

Die Multiplikation mit einer skalaren Größe, eine Operation, die sich ja nur auf den absoluten Betrag der Vektoren, nicht auf die Richtung beziehen kann, muß wieder der distributiven Regel folgen:

$$[x\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a},\ x\,\mathfrak{b}] = x\,[\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}].$$

Ebenso behält das distributive Gesetz für die vektorielle Produktbildung mehrerer Vektoren Gültigkeit, d. h. es ist

$$[\mathfrak{a} + \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a},\ \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}]. \tag{3}$$

Erster Fall. Es sei $\mathfrak{c}$ nicht komplanar mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Wir setzen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, $\mathfrak{c}$ sei ein Einheitsvektor; dann ist der Vektor $[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ seinem absoluten Betrag nach gleich (vgl. Fig. 7)

$$|[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]| = d\sin(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \equiv d'.$$

Ebenso:

$$|[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]| = a\sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) \equiv a',$$

$$|[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]| = b\sin(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \equiv b'.$$

Die Richtungen der drei Vektoren sind senkrecht zu den Parallelogrammen: $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ resp. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$. d', a', b' sind gleich den absoluten Beträgen der Projektionen $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, durch welche die Vektoren $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in einer zu $\mathfrak{c}$ senkrechten Ebene abgebildet werden; da nun die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $-\mathfrak{b}$ ein geschlossenes Dreieck bilden,

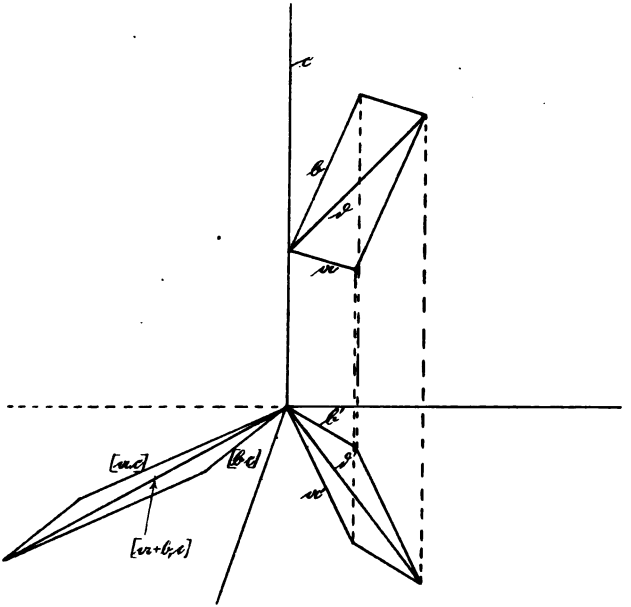

Fig. 7.

so bilden auch die Projektionen in ein und dieselbe Ebene ein geschlossenes Dreieck und es ist

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'.$$

Drehen wir um $\mathfrak{c}$ als Drehungsachse das Dreieck um 90^0, so fallen die Seiten $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ der Größe und Richtung nach mit den Vektoren

$$[\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{c}], [\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}], [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$$

zusammen, so daß die Richtigkeit der obigen Gleichung

und damit die Gültigkeit des distributiven Gesetzes für den ersten Fall erwiesen ist.

Zweiter Fall. $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegen in einer Ebene, dann sind die Richtungen der Vektoren $[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]$, $[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]$ alle parallel, und für die absoluten Beträge, die gleich dem Flächeninhalt der Parallelogramme $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ sind, gilt die Beziehung:

$$|[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]| + |[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]| = |[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]|,$$

also ist

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}].$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms $a\,b\sin(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ mit parallelen Seiten $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist Null wegen $\sin 0^0 = 0$, es kann also

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = 0 \tag{4}$$

als der Ausdruck der Parallelität zweier Vektoren betrachtet werden. Der absolute Betrag des Produktes senkrechter Vektoren ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge.

Für die zueinander rechtwinklig stehenden drei Einheitsvektoren ergibt sich hieraus:

$$\begin{cases} [\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\,\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}] = 0, \\ [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] = -[\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}] = \mathfrak{k},\ [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = -[\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = \mathfrak{i},\ [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = -[\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{j}. \end{cases} \tag{5}$$

Das Produkt zweier durch die Einheitsvektoren dargestellter Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ läßt sich in Form einer Determinante schreiben:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] &= [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}](a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &\quad + [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}](a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &\quad + [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}](a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ &= \mathfrak{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &\quad + \mathfrak{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ &\quad + \mathfrak{j}(a_3 b_1 - a_1 b_3) \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Die Unterdeterminanten stellen die Projektionen des durch den Vektor [a b] der Größe und Richtung nach definierten Parallelogramms in die $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Ebene dar.

§ 11. Anwendung auf die Statik.

Es soll an das Beispiel in § 1 angeknüpft werden.

Ein System von Kräften $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$, die an den Punkten $p_1 \dots p_n$ eines freien, starren Körpers angreifen, halten sich das Gleichgewicht, wenn die resultierende Einzelkraft und das resultierende Koppelmoment in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt Null ist. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten also:

$$\Sigma \mathfrak{P}_i = 0 , \tag{1}$$

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] = 0 , \tag{2}$$

wenn $\mathfrak{p}_i$ der Radiusvektor des Punktes p_i von einem willkürlich gewählten Koordinatenanfangspunkt O ist. Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so stellen $\Sigma \mathfrak{P}_i$ resp. $\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i]$ die am Bezugspunkt O angreifende resultierende Kraft und das resultierende Koppelmoment für den Bezugspunkt O dar. Eine Änderung des Bezugspunktes ändert im allgemeinen $\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i]$; es sei der neue Bezugspunkt O' durch den Vektor $\mathfrak{a}$, der von O nach O' geht, gegeben, so ist

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] = + \Sigma [\mathfrak{a} \mathfrak{P}_i] + \Sigma [\mathfrak{p}'_i \mathfrak{P}_i] , \tag{3}$$

worin sich $\mathfrak{p}'_i$ auf den neuen Koordinatenanfangspunkt O' beziehen soll. Ist $\mathfrak{a}$ so gewählt, daß

$$\Sigma [\mathfrak{a} \mathfrak{P}_i] = [\mathfrak{a} \Sigma \mathfrak{P}_i] = 0 ,$$

d. h. fällt $\mathfrak{a}$ in die Richtung der resultierenden Einzelkraft, so ist das Koppelmoment in bezug auf den neuen Koordinatenanfangspunkt O' gleich dem in bezug auf O; d. h. es kann der Bezugspunkt des Koppelmomentes, ohne eine Änderung desselben hervorzurufen, in Richtung der resultierenden Einzelkraft verschoben werden.

Ist der Körper an dem Punkt O' drehbar befestigt, so wird am Gleichgewicht des Systems nichts geändert, wenn an

diesem Punkt eine neue Kraft $\mathfrak{R}$, von welcher Größe und Richtung sie auch sei, angreift. Wählen wir O' als Anfangspunkt, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma \mathfrak{P}_i + \mathfrak{R} = 0$$

und

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i', \mathfrak{P}_i] + [0, \mathfrak{R}] = 0 .$$

$\mathfrak{R}$ kann nun immer so gewählt werden, daß der ersten Bedingung genügt wird, d. h. $\Sigma \mathfrak{P}_i$ kann jeden beliebigen Wert annehmen; es bleibt nur die zweite Bedingung zur Existenz des Gleichgewichts übrig:

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i' \mathfrak{P}_i] = 0 .$$

Ist der Körper an zwei Punkten O und O' befestigt, also um die Achse $OO' = \mathfrak{a}$ drehbar, so wird wieder am Gleichgewicht nichts geändert, wenn man in den Punkten O und O' der Achse neue Kräfte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, von welcher Größe und Richtung sie auch sein mögen, angreifen läßt. Den Punkt O' der Achse wählen wir als Bezugspunkt, dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma \mathfrak{P}_i + \mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = 0 , \\ \Sigma [\mathfrak{p}_i - \mathfrak{a}, \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a}, \mathfrak{R}] = 0 . \end{cases}$$

Statt der zweiten Gleichung können wir schreiben:

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a} \Sigma \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a}, \mathfrak{R}] = 0$$

oder

$$(5) \qquad \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] + [\mathfrak{a} \mathfrak{R}'] = 0 ,$$

worin $\mathfrak{R}'$ willkürlich gewählt werden kann. Es sei

$$\mathfrak{M} = A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k} = \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i]$$

das resultierende Moment der vorgelegten Kräfte für den Bezugspunkt O; $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mögen so gewählt sein, daß $\mathfrak{i}$ in die Richtung $\mathfrak{a}$ fällt. Da nun der Vektor $[\mathfrak{a} \mathfrak{R}']$ senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht, kann man setzen:

$$[\mathfrak{a} \mathfrak{R}'] = B_2 \mathfrak{j} + B_3 \mathfrak{k} ,$$

worin B_2 und B_3 wegen der Willkürlichkeit von $\mathfrak{R}'$ willkürlich gewählt werden können. Wir wählen sie so, daß

$B_2 = -A_2$, $B_3 = -A_3$ ist, dann bleibt als einzige Gleichgewichtsbedingung übrig: $A_1 = 0$, — denn Gleichung (4_1) kann wegen des noch frei verfügbaren $\mathfrak{R}$ stets erfüllt werden, — d. h. das Moment in Richtung der Achse muß Null sein oder $\mathfrak{M}$ senkrecht zu $\mathfrak{a}$, also:

$$(6) \qquad (\mathfrak{M}\,\mathfrak{a}) = 0.$$

§ 12. Multiplikation von mehr als zwei vektoriellen Faktoren.

Wir haben in § 3 zwei verschiedene Arten von Vektoren kennen gelernt, die polaren und die axialen Vektoren. In der Definition der Vektorenprodukte ist auf diesen Unterschied nicht Bezug genommen worden. Da nun die zur Ableitung der Definition benutzten Beispiele nur von Produkten handeln, die aus polaren Vektoren gebildet sind, so ist es notwendig, die anderen Kombinationen kurz zu besprechen, um die Bedeutung der Produkte andersgearteter Vektoren kennen zu lernen, speziell um zu erkennen, ob diese Produkte axialer oder polarer Natur sind. In Hinsicht darauf, daß, wie oben bemerkt, ein axialer Vektor als das Vektorprodukt zweier polarer betrachtet werden kann, können wir Produkte aus zwei Vektoren, von denen wenigstens einer ein axialer Vektor ist, als ein Produkt von mehr als zwei Vektoren betrachten.

§ 13. Skalares Produkt eines polaren und eines axialen Vektors oder $(\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}])$.

Ein axialer Vektor ist darstellbar durch die Größe eines Parallelogramms und die Richtung seiner Normalen. Das Produkt eines solchen in einen polaren Vektor ist gleich dem Inhalt dieses Parallelogramms multipliziert mit der Projektion des polaren Vektors auf die Normale,

d. h. gleich dem Inhalt des Parallelepipeds, das über dem Parallelogramm als Basis mit dem polaren Vektor als dritter bestimmender Kante errichtet werden kann. Für den axialen Vektor können wir symbolisch $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ schreiben, so daß das skalare Produkt eines polaren und eines axialen Vektors die Form annimmt:

$$\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nun polare Vektoren vorstellen. Ist daher andererseits nicht bloß das Produkt $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ durch Angabe eines axialen Vektors gegeben, sondern die Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ selbst, so ist das dreifache Produkt $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ gleich dem Inhalt des Parallelepipeds mit den drei bestimmenden Kanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Wenn wir sämtliche Richtungen, auf welche die Vektoren bezogen werden, umkehren, so ändert der polare Vektor $\mathfrak{c}$ sein Zeichen, während der axiale sein Zeichen behält. Es ändert also auch das Produkt $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ das Vorzeichen; es ist daher, obgleich es als skalares Produkt eingeführt worden ist, doch von den Richtungen in gewissem Sinne abhängig. Man bezeichnet solche skalare Größen, welche das Zeichen bei Änderung der Bezugsrichtungen in das entgegengesetzte ändern, Pseudoskalare [1]).

Durch zyklische Vertauschung der Achsenrichtungen wird das Vorzeichen nicht geändert, es ist also

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] \\ = -\mathfrak{c}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}] = -\mathfrak{a}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}] = -\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]\,. \end{cases}$$

Sind die drei Vektoren durch die Komponenten nach den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, so kann das skalare Produkt in der Determinantenform geschrieben werden:

[1]) Klein und Timerding unterscheiden die beiden Arten durch die Bezeichnung: Skalar erster und zweiter Art.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Denn die Komponenten des axialen Vektors $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ sind die Unterdeterminanten dieser Determinante, und das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der Komponenten.

Liegt $\mathfrak{c}$ in der Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist der Inhalt des aus den drei Vektoren gebildeten Parallelepipeds Null, also $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = 0$. Dies geht auch unmittelbar aus der Rechnung hervor, wenn wir $\mathfrak{c}$ durch die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ausdrücken, welches in dem Fall der Komplanarität möglich ist. Es sei

$$\mathfrak{c} = x\,\mathfrak{a} + y\,\mathfrak{b},$$

dann lautet das Produkt:

$$x\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] + y\,\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = x\,\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] + y\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = 0.$$

Ein wichtiges Beispiel eines solchen skalaren Produktes dreier Vektoren liefert der sogenannte Vektorfluß durch eine Fläche. Die Wassermenge in einem Strom, die in der Zeiteinheit durch eine Fläche von beliebiger, vorgegebener Lage und Größe innerhalb des von der Wassermasse durchströmten Raumes hindurchtritt, ist gleich der Menge, die in den Zylinder hineingeht, dessen Basis die vorgegebene Fläche ist und dessen Leitlinie der Größe und Richtung nach gleich der Geschwindigkeit des Wassers an dieser Stelle ist. Ist die Basis das Parallelogramm $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, so ist die pro Zeiteinheit hindurchtretende Wassermenge, wenn dieselbe sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ bewegt, gegeben durch das skalare Produkt:

$$\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}].$$

Man nennt dasselbe den Fluß, Durchfluß des Vektors $\mathfrak{c}$, den Geschwindigkeitsfluß durch die Fläche.

Ist $\mathfrak{c}$ ein Kraftvektor, so spricht man von Kraftfluß; stehen z. B. zwei entgegengesetzt elektrisch geladene, unendlich große, leitende Platten einander parallel gegenüber, einen freien Ätherraum einschließend, so daß zwischen ihnen ein homogenes elektrisches Feld besteht, welches die Feldstärke $\mathfrak{c}$ besitzt — d. h. auf den positiv geladenen elektrischen Einheitspol die Kraft $\mathfrak{c}$ an jeder Stelle des Feldes ausübt —, so ist der Kraftfluß durch eine irgendwie gelegene Fläche $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ durch das skalare Produkt $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ gegeben. Man nennt den numerischen Wert dieses Produktes die Zahl der Strömungs- oder Kraftlinien durch die Fläche von der vorgegebenen Richtung.

§ 14. Vektorprodukt eines polaren und eines axialen Vektors oder $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]$.

Nach der Definition des Vektorproduktes steht der durch dasselbe bestimmte Vektor senkrecht auf der Ebene, die durch die vektorischen Faktoren, im vorliegenden Fall durch die Normale des aus $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gebildeten Parallelogramms und den polaren Vektor geht. Er liegt also jedenfalls in der Ebene des Parallelogramms $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und muß sich schreiben lassen:

$$(1) \qquad [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = x\,\mathfrak{b} + y\,\mathfrak{c}\,.$$

Um x und y zu finden, rechnen wir die linke Seite mit Benutzung der Komponentendarstellung der Vektoren aus. Wir legen der bequemeren Rechnung wegen den Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{c}$, den Vektor $\mathfrak{j}$ in die Ebene von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$; dann ist

$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{i}\,,$$
$$\mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{i} + b_2\,\mathfrak{j}\,,$$
$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}\,,$$

also:

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = -c_1 b_2\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{k}] = -c_1 b_2 (a_2\,\mathfrak{i} - a_1\,\mathfrak{j}) .$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung muß sich in der Form $x\,\mathfrak{b} + y\,\mathfrak{c}$ schreiben lassen, d. h. es muß sein

$$x b_1\,\mathfrak{i} + x b_2\,\mathfrak{j} + y c_1\,\mathfrak{i} = -c_1 b_2 a_2\,\mathfrak{i} + c_1 b_2 a_1\,\mathfrak{j} ,$$

daher:

$$x = c_1 a_1 = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) ,$$
$$y = -a_2 b_2 - b_1 a_1 = -(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}) .$$

Das Vektorprodukt aus den drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nimmt also die Form an:

$$(2) \qquad [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{c} .$$

Es folgt hieraus die Beziehung:

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]] = 0 .$$

In Gleichung (2) steht rechts die Differenz zweier polarer Vektoren, die mit wirklichen Skalaren multipliziert sind. Es muß daher auch das Vektorprodukt aus drei polaren Vektoren oder aus einem polaren und einem axialen Vektor ein polarer Vektor sein.

§ 15. Produkte zweier axialer Vektoren.

1. Skalares Produkt aus zwei axialen Vektoren oder $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]$.

Um diesen Ausdruck auf Produkte aus polaren Vektoren zurückzuführen, setzen wir $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{e}$, dann folgt aus den beiden letzten Paragraphen, daß

$$\begin{aligned}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] &= \mathfrak{e}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] = \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{c}] \\ &= \mathfrak{d}\,[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}] \\ &= \mathfrak{d}\{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{a}\} \\ &= (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) .\end{aligned}$$

Rechts steht zuletzt die Differenz zweier Produkte aus reinen skalaren Größen; das skalare Produkt zweier axialer Vektoren ist also kein Pseudoskalar.

2. Vektorprodukt aus zwei axialen Vektoren oder $[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]]$.

Setzen wir wieder $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{e}$, so wird

$$\begin{aligned}[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] &= [\mathfrak{e}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] \\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{d}) - \mathfrak{d}\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{c}) \\ &= \mathfrak{c}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{d}) - \mathfrak{d}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c})\,.\end{aligned}$$

Hier sind die polaren Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ mit Pseudoskalaren multipliziert, es muß daher die Differenz ein axialer Vektor sein. Zusammenfassend können wir sagen:

Das Vektorprodukt aus zwei polaren oder aus zwei axialen Vektoren stellt wieder einen axialen Vektor dar, das Vektorprodukt aus einem polaren und einem axialen Vektor einen polaren.

Da übrigens

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] = -[[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]\,,$$

so ist auch

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] = -\mathfrak{a}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{a})\,.$$

Wir erhalten hieraus die wichtige Beziehung zwischen 4 Vektoren, von denen nicht drei in einer Ebene liegen:

$$-\mathfrak{d}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\,([\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{d}) + \mathfrak{b}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{a}) + \mathfrak{c}\,([\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b})$$

oder, da $([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c})$ eine skalare Größe ist und Vektoren durch skalare Größen dividiert werden, indem man den absoluten Betrag durch die skalare Größe dividiert, nach Division:

$$-\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\frac{\mathfrak{b}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]} + \mathfrak{b}\,\frac{\mathfrak{a}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]}{\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]} + \mathfrak{c}\,\frac{\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}]}{\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}\,.$$

3. Endlich sei noch besonders darauf hingewiesen, daß bei der Kombination $a\,(b\,c)$, die in §§ 13—15 schon benutzt worden ist, auf die Klammern geachtet werden muß, indem $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ einen Vektor darstellt von der Größe

$$a\,b\,c\cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

und der Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$, da $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ nichts anderes als eine skalare Größe ist. Es sind die Vektoren

$$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$$

völlig verschiedene Größen.

§ 16. Division von Vektoren.

Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren, heißt, die Zahl finden, welche, mit b multipliziert, die Zahl a gibt. Diese Definition auf die Vektordivision übertragen, lautet:

Eine Größe A (Skalar oder Vektor) durch eine andere Größe B (Skalar oder Vektor) dividieren, heißt, die Größe C finden, welche, in die Größe B multipliziert, die Größe A gibt.

Von dieser Übertragung der gewöhnlichen arithmetischen Division auf die Vektorrechnung ausgehend, wollen wir untersuchen, ob die darin enthaltene Aufgabe der Division eindeutig bestimmt ist und zu eindeutiger Lösung führt.

Wenn also $\frac{A}{B} = C$, so ist C dadurch bestimmt, daß $CB = A$ sein soll.

1. Ist B eine skalare Größe, so ist die Aufgabe identisch mit der der Arithmetik; der absolute Betrag von C ist gleich dem absoluten Betrag von A dividiert durch B. Ist A ein Vektor, so auch C, und zwar von gleicher Richtung.

2. Wir nehmen also an: B sei ein Vektor $= \mathfrak{b}$:

α) A sei ein Vektor $= \mathfrak{a}$.

Die allgemeine Annahme über C ist, daß es die Summe einer skalaren Größe und eines Vektors bildet. Wir setzen daher:

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = x + \mathfrak{c}\,,$$

worin die rechte Seite der Bedingung zu genügen hat:

$$\mathfrak{a} = (x + \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}\,; \tag{1}$$

hierbei ist von vornherein über die Art der Multiplikation von $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}$ nichts gesagt. Da links aber ein Vektor steht, so muß notwendigerweise die vektorielle Multiplikation vorgenommen werden, da $\mathfrak{c}$ im allgemeinen nicht Null sein wird (denn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ werden im allgemeinen verschiedene Richtung haben). Die Aufgabe ist daher für diesen Fall ($A = \mathfrak{a}$) dahin einzuschränken, daß ein solches C gesucht wird, daß die Summe aus dem Produkt des Vektors $\mathfrak{b}$ mit dem skalaren Teil von C und dem Vektorprodukt des Vektors $\mathfrak{b}$ mit dem vektoriellen Teil von C den Vektor $\mathfrak{a}$ gibt. Da aber die skalare Multiplikation keinen Sinn haben würde, brauchen wir diese Einschränkung weiterhin nicht besonders hervorzuheben. Wegen der vorliegenden vektoriellen Multiplikation muß auf die Reihenfolge der Faktoren C und B geachtet werden, und es soll die Festsetzung getroffen werden, daß der Dividend durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor, bei welcher der letztere an zweiter Stelle steht, erhalten wird.

Wir können nach geeigneter Wahl von $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ schreiben:

$$\mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{i}\,,$$
$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j}\,,$$
$$\mathfrak{c} = c_1\,\mathfrak{i} + c_2\,\mathfrak{j} + c_3\,\mathfrak{k}\,,$$

so daß aus Gleichung (1) folgt:

$$x\,b_1 = a_1\,,$$
$$c_3\,b_1 = a_2\,,$$
$$c_2 = 0\,.$$

Für c_1 erhalten wir hieraus keine Bedingung, c_1 ist völlig willkürlich. Die Lösung ist also:

$$C = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1}\mathfrak{k} + c_1\mathfrak{i}$$

und wegen der Unbestimmtheit von c_1 in bezug auf die Komponente des Vektorteiles von C, welche in die Richtung des Divisors fällt, unendlich vieldeutig.

Ein spezieller Fall ist: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, d. h.

$$a_1 = b_1\,, \quad a_2 = 0\,,$$

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = C = 1 + c_1\mathfrak{i}\,.$$

β) A sei eine skalare Größe $= a$:

$$\frac{a}{\mathfrak{b}} = x + \mathfrak{c}\,,$$

$$a = (x + \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}\,.$$

Da a eine skalare Größe ist, kann auch rechts nur ein skalarer Ausdruck stehen; daraus folgt, daß $x = 0$ sein muß und die Multiplikation von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ skalar auszuführen ist. Unter Beibehaltung derselben Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ folgt:

$$c_1 b_1 = a\,,$$

während c_2 und c_3 willkürlich sind. Die Lösung:

$$C = \frac{a}{b_1}\mathfrak{i} + c_2\mathfrak{j} + c_3\mathfrak{k}$$

ist nur bis auf einen additiven, zur Richtung des Divisors senkrecht stehenden Vektor von beliebiger Größe eindeutig.

Ein spezieller Fall hiervon ist: $a = 1$, d. h.

$$\frac{1}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{b_1}\mathfrak{i} + c_2\mathfrak{j} + c_3\mathfrak{k}.$$

Von der vorliegenden Vieldeutigkeit machen wir uns frei, wenn wir die Festsetzung treffen, daß der reziproke Wert eines Vektors die gleiche Richtung wie der Vektor haben soll; der absolute Betrag ist dann der reziproke Wert des absoluten Betrages des Divisors.

Es entsteht nach dieser Festsetzung sofort die Frage, ob die Division mit einem vektoriellen Divisor ersetzt werden darf durch skalare oder vektorielle Multiplikation des Dividenden mit dem reziproken Divisor.

Wir betrachten wieder die Fälle α) und β) einzeln:

α) A ein Vektor $= \mathfrak{a}$.

Es ist

$$\mathfrak{a} \cdot \frac{1}{\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}$$

und

$$\left[\mathfrak{a}\,\frac{1}{\mathfrak{b}}\right] = -\frac{a_2}{b_1}\mathfrak{k} = -\left[\frac{1}{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{a}\right].$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\frac{1}{b}\mathfrak{a} + \left[\frac{1}{b}\,\mathfrak{a}\right] = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1}\mathfrak{k} = C - c_1\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} - c_1\mathfrak{i}.$$

β) A eine skalare Größe $= a$:

$$a\,\frac{1}{\mathfrak{b}} = \frac{a}{b_1}\mathfrak{i} = C - c_2\mathfrak{j} - c_3\mathfrak{k} = \frac{a}{\mathfrak{b}} - c_2\mathfrak{j} - c_3\mathfrak{k},$$

eine vektorielle Multiplikation gibt es nicht.

Es folgt daraus der Satz:

Die Division mit einem vektoriellen Divisor

ist gleichbedeutend mit der Summe der skalaren und der vektoriellen Multiplikation des reziproken Divisors in den Dividenden, wenn die Festsetzung getroffen wird, daß die im Resultat der Division vorkommenden willkürlichen, additiven Vektoren gleich Null gesetzt werden sollen.

Beispiele:

$$\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = a\cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{i} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} = a_1\mathfrak{i}\,,$$

wenn $\mathfrak{b}$ in die Richtung $\mathfrak{i}$ fällt, und

$$\frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{i}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}] + [\mathfrak{i}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}]] = \mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{i})\,\mathfrak{i} = a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}\,.$$

Diese beiden Beziehungen zeigen, daß, wenn ein vektorieller Faktor eines gegebenen skalaren oder vektoriellen Produktes bekannt ist, von dem anderen Faktor nur die Komponente in Richtung, resp. senkrecht zur Richtung des bekannten Vektors bestimmt ist. Aus der Kenntnis beider Produkte dagegen und des einen Faktors läßt sich der andere eindeutig berechnen.

§ 17. Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe.

Der Vektor $\mathfrak{a}$, der sich auf eine bestimmte Stelle des Raumes (x, y, z) beziehen mag, sei eine Funktion der Zeit t. Er sei, im Bildraum mit den Achsen $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ dargestellt, zur Zeit $t = t_0$ gegeben durch

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}\,.$$

Die Änderung des Vektors während des Zeitelementes dt an derselben Stelle (x, y, z) ist dann durch

$$\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial\,t} = \frac{\partial\,a_1}{\partial\,t}\mathfrak{i} + \frac{\partial\,a_2}{\partial\,t}\mathfrak{j} + \frac{\partial\,a_3}{\partial\,t}\mathfrak{k}$$

gegeben, da die Abbildung in demselben Abbildungsraum geschieht, d. h. die Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ unabhängig von der Zeit sind. Diese Änderung kann man als lokale Änderung mit der Zeit bezeichnen, indem hier zunächst von einer gleichzeitigen Änderung des Ortes x, y, z abgesehen ist, wovon später (§ 22) die Rede sein soll.

Bei mehrfacher Differentiation gilt entsprechend:

$$\frac{\partial^n \mathfrak{a}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n a_1}{\partial t^n}\mathfrak{i} + \frac{\partial^n a_2}{\partial t^n}\mathfrak{j} + \frac{\partial^n a_3}{\partial t^n}\mathfrak{k}\,.$$

Die Differentiation von Produkten folgt den bekannten Regeln der Analysis. Es ist

$$\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{dt} = \frac{1}{dt}\{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{a} + d\mathfrak{a})(\mathfrak{b} + d\mathfrak{b})\} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b} + \frac{d\mathfrak{b}}{dt}\mathfrak{a}$$

und

$$\frac{d[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{dt} = \frac{1}{dt}\{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] - [(\mathfrak{a} + d\mathfrak{a})(\mathfrak{b} + d\mathfrak{b})]\} = \left[\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b}\right] + \left[\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right];$$

im letzteren Fall muß, den Regeln der Vektormultiplikation entsprechend, auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden.

In gleicher Weise läßt sich die Änderung des Vektors $\mathfrak{a}$, bei Änderung irgend eines skalaren Argumentes von $\mathfrak{a}$, aus der Änderung der Komponenten berechnen; so z. B.:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_1}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial a_2}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial a_3}{\partial x}\mathfrak{k}\,.$$

Der Differentialquotient eines Einheitsvektors $\bar{\mathfrak{a}}(t)$ nach seinem skalaren Argument ist ein Vektor, der auf dem Einheitsvektor senkrecht steht. Denn die Differentiation der Bedingung, daß $\bar{\mathfrak{a}}$ ein Einheitsvektor ist, nämlich der Gleichung:

$$\bar{\mathfrak{a}}^2 = 1$$

nach seinem skalaren Argument ergibt:

$$2\,\bar{a}\,\frac{d\bar{a}}{dt} = 0\,,$$

d. h. $\bar{a}$ und $d\bar{a}$ sind zwei aufeinander senkrechte Vektoren. Das gilt natürlich nur so lange, als die Größe des Einheitsvektors die Einheit bleiben soll. Es ist im Gegensatz hierzu die Formel anzumerken:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{a}) \equiv \frac{d}{dt}(a\,\bar{a}) = \bar{a}\,\frac{da}{dt} + a\,\frac{d\bar{a}}{dt}\,,$$

worin wieder $\bar{a}$ und $d\bar{a}$ aufeinander senkrecht stehen.

Ist $\mathfrak{a}$ der Größe und Richtung nach der Radiusvektor einer durch die Polarkoordinaten r und φ dargestellten ebenen Kurve, so daß

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \Sigma d\mathfrak{a}\,,$$

so ist

$$d\mathfrak{a} = \bar{a}\,da + a\,d\bar{a}\,,$$

und durch skalare Multiplikation:

$$(d\mathfrak{a})^2 = (da)^2 + a^2\,(d\bar{a})^2\,.$$

Die analoge analytische Formel lautet:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2\,(d\varphi)^2\,.$$

Es folgt hieraus die Bedeutung von $d\bar{a}$, es ist

$$|\,d\bar{a}\,| = d\varphi$$

der Betrag der Winkeländerung des Vektors $\mathfrak{a}$ gegen eine gegebene Richtung.

Ist der Vektor $\mathfrak{a}$ der Ortsvektor eines Massenpunktes an der Stelle x, y, z selbst, also

$$\mathfrak{a} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}\,,$$

so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x} = \mathfrak{i}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y} = \mathfrak{j}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial z} = \mathfrak{k};$$

das sind die Änderungen des Vektors, wenn wir von Punkt x, y, z übergehen zu dem Punkt $x + dx, y, z$, resp. $x, y + dy, z$, oder $x, y, z + dx$, dividiert durch die jedesmalige Entfernung des neuen Punktes vom alten. Gehen wir von (x, y, z) zu dem Punkt (x_1, y_1, z_1), dessen Lage zu dem Ausgangspunkt durch das Element $d\mathfrak{a} \equiv de \cdot \bar{\mathfrak{e}}$ gegeben sein mag, so ist die Änderung des Vektors $\mathfrak{a}$ auf diesem Wege pro Längeneinheit

$$\frac{\bar{\mathfrak{e}} \cdot de}{de} = \bar{\mathfrak{e}},$$

gleich einem Einheitsvektor, dessen Richtung mit der der Vektoränderung, oder der der Bahntangente des Vektors, in dem Punkte x, y, z zusammenfällt.

Bewegt sich der Massenpunkt von (x, y, z) auf einer Kurve $C = \Sigma d\bar{s}$ und ist der Ort des Punktes auf der Kurve gegeben durch die auf derselben gemessene Entfernung s von einem beliebig gewählten Kurvenpunkt, so ist $d\mathfrak{a} \equiv \bar{\mathfrak{e}}\, de = d\bar{s}$ eine Funktion von s, und

$$\frac{d\mathfrak{a}}{de} = \frac{d\bar{s}}{ds} = \bar{d\bar{s}},$$

wenn $ds = |d\bar{s}|$ gesetzt wird. Der absolute Betrag der Geschwindigkeit des Punktes in der Kurve sei $v = \dfrac{ds}{dt}$, dann ist die Geschwindigkeit selbst der Richtung und Größe nach, d. h. die zeitliche Änderung des Vektors $\mathfrak{a}$ gegeben durch:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{ds}\frac{ds}{dt} = \bar{d\bar{s}}\, v = \mathfrak{v}.$$

Der Vektor der Beschleunigung ist dargestellt durch:

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\,d\bar{\mathfrak{s}}}{ds} v^2 + d\bar{\mathfrak{s}} \frac{dv}{dt}.$$

$\frac{d\,d\bar{\mathfrak{s}}}{ds}$, ein nach seinem Argument differenzierter Einheitsvektor, muß senkrecht stehen zu dem Einheitsvektor $d\bar{\mathfrak{s}}$. $d\,d\bar{\mathfrak{s}}$ gibt die Richtungsänderung der Tangente, wenn wir auf der Kurve von x, y, z zu x_1, y_1, z_1 weitergehen (vgl. Fig. 8). Die Normalen in der Ebene des Krümmungskreises zu den Tangenten in diesen beiden Punkten schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt. Die vektorielle Änderung des Krümmungsradius vom Punkt (x, y, z) zu (x_1, y_1, z_1) ist

$$d\mathfrak{R} = d\mathfrak{s} = d\bar{\mathfrak{s}}\, ds$$

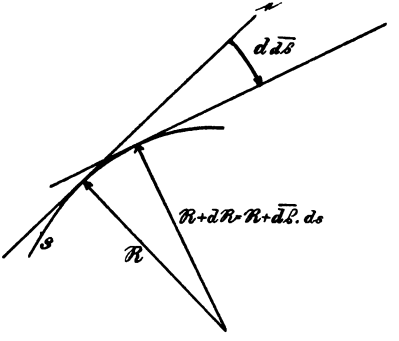

Fig. 8.

und steht senkrecht auf dem Krümmungsradius $\mathfrak{R}$ im Punkt (x, y, z); also ist $d\,d\bar{\mathfrak{s}}$ parallel zu $\mathfrak{R}$, aber entgegengesetzt gerichtet. Aus der Ähnlichkeit der Vektordreiecke folgt ferner:

$$\frac{|d\,d\bar{\mathfrak{s}}|}{1} = \frac{ds}{|\mathfrak{R}|},$$

also:

$$\frac{d\,d\bar{\mathfrak{s}}}{ds} = -\frac{1}{\mathfrak{R}}$$

und:

$$\mathfrak{b} = -\frac{v^2}{\mathfrak{R}} + d\bar{\mathfrak{s}}\frac{dv}{dt}.$$

Diese Form enthält die bekannte Zerlegung der Beschleunigung in einen tangentialen Teil $d\bar{\mathfrak{s}}\frac{dv}{dt}$ und einen zur Bahnkurve normalen Teil $-\frac{v^2}{\mathfrak{R}}$.

§ 18. Satz vom kleinsten Koppelmoment.

In den Anwendungen auf die Statik, § 11, wurde gezeigt, daß die Größe und Richtung des Koppelmomentes durch Änderung des Bezugspunktes, d. h. des Angriffspunktes der resultierenden Einzelkraft, geändert wird. Es soll nun die Bedingung dafür aufgesucht werden, daß das resultierende Koppelmoment den kleinsten möglichen Wert annimmt. Es wird also der Vektor $\mathfrak{a}$ gesucht, für welchen

$$\mathfrak{R}' = \Sigma[\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{P}_i] - \Sigma[\mathfrak{a}\,\mathfrak{P}_i] \tag{1}$$

ein Minimum wird. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{R}'$ folgt:

$$\mathfrak{R}'^2 = \Sigma[\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{P}_i]\cdot\mathfrak{R}' + \mathfrak{a}\,\Sigma[\mathfrak{R}'\,\mathfrak{P}_i]. \tag{2}$$

Soll der absolute Betrag von $\mathfrak{R}'$ ein Minimum werden, so muß es auch $\mathfrak{R}'^2$ werden; die Bedingung lautet daher:

$$\frac{d\mathfrak{R}'^2}{d\mathfrak{a}} = 0,$$

oder

$$\Sigma\,[\mathfrak{K}_m\,\mathfrak{P}_i] = [\mathfrak{K}_m\,\Sigma\,\mathfrak{P}_i] = 0 \quad (3)$$

[1]),

d. h. es ist die Richtung des resultierenden kleinsten Koppelmomentes $\mathfrak{K}_m$ parallel zur Richtung der resultierenden Einzelkraft.

Die Größe des kleinsten resultierenden Koppelmomentes ergibt sich aus der Größe und Richtung des resultierenden Momentes

$$\mathfrak{K} = \Sigma\,[\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{P}_i]$$

mit dem Bezugspunkt, von dem aus die Strecken $\mathfrak{p}_i$ gerechnet werden, durch skalare Multiplikation der Gleichung (1) mit $\mathfrak{R} = \Sigma\,\mathfrak{P}_i$. Es folgt aus (1): $\mathfrak{K}\mathfrak{R} = \mathfrak{K}'\mathfrak{R}$, oder wenn wir statt $\mathfrak{K}'$ das kleinste Moment $\mathfrak{K}_m$ einsetzen, da $\mathfrak{K}_m$ und $\mathfrak{R}$ parallel sind:

$$K_m R = \mathfrak{K}\mathfrak{R} \quad \text{oder} \quad K_m = \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{R}}\,.$$

Hat man also ein gegebenes Kraftsystem am starren Körper zu einer an dem beliebig gewählten Punkt O angreifenden resultierenden Einzelkraft $\mathfrak{R}$ und einem resultierenden Koppelmoment $\mathfrak{K}$ zusammengefaßt, so ist das kleinste resultierende Koppelmoment der Größe und Richtung nach gleich der senkrechten Projektion von $\mathfrak{K}$ in die Richtung der Einzelkraft $\mathfrak{R}$.

Um endlich den Angriffspunkt der Einzelkraft für den Fall des kleinsten Koppelmomentes zu finden, multiplizieren wir Gleichung (1), in der wir nun $\mathfrak{K}'$ durch $\mathfrak{K}_m$ ersetzen, vektorisch mit $\mathfrak{R}$, dann kommt:

$$0 = [\mathfrak{K}\,\mathfrak{R}] - [[\mathfrak{a}\,\mathfrak{R}]\,\mathfrak{R}]\,,$$

oder

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{R}^2 = -[\mathfrak{K}\,\mathfrak{R}] + \mathfrak{R}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{R})\,,$$

---

[1]) Für die Differentiation eines Vektors nach einem Vektor sind freilich bis hierher noch keine Regeln abgeleitet worden; in dem vorliegenden einfachen Fall können wir uns indessen leicht von der Richtigkeit der Gleichung (3), die durch Differentiation von (2) nach $\mathfrak{a}$ gewonnen ist, überzeugen, wenn wir an Stelle des Differentialquotienten den Differenzenquotient $\frac{1}{d\mathfrak{a}}\,(d\mathfrak{K}'^2_{(\mathfrak{a}+d\mathfrak{a})} - d\mathfrak{K}'^2_{(\mathfrak{a})})$ bilden und Null setzen.

oder

$$\mathfrak{a} = -\frac{[\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}}]}{R} + \overline{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{R}})\,.$$

Nun kann man ohne Änderung des Koppelmomentes den Angriffspunkt in Richtung der resultierenden Einzelkraft verschieben, d. h. man kann zum Vektor $\mathfrak{a}$ einen beliebigen, zu $\mathfrak{R}$ parallelen Vektor hinzuaddieren, also auch $-\overline{\mathfrak{R}}\,(\mathfrak{a}\,\overline{\mathfrak{R}})$, ohne daß man an seiner Bedeutung, einen Bezugspunkt des kleinsten Koppelmomentes zu definieren, etwas ändert. Es liegt also der zum kleinsten Koppelmoment gehörige Angriffspunkt der resultierenden Einzelkraft in der zur Richtung der Resultante parallelen Geraden, welche durch den von dem Vektor $\mathfrak{a}$ definierten Punkt geht, wenn der Vektor

$$\mathfrak{a} = -\frac{[\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}}]}{R}$$

ist und von dem zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Angriffspunkt ausgeht.

§ 19. Zentralbewegung.

Zwischen zwei Punkten mit der Masse m und M möge in Richtung ihrer Entfernung eine von der Entfernung abhängige Kraft wirksam sein. Dann lautet die Gleichung der Bewegung des Massenpunktes m um den Massenpunkt M, wenn $\mathfrak{r}$ die Entfernung der Punkte der Richtung und Größe nach definiert und $F(r)\,\overline{\mathfrak{r}}$ die auf die Masseneinheit bezogene Kraft darstellt:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\,M\,F(r)\,\overline{\mathfrak{r}}\,. \tag{1}$$

Diese Vektordifferentialgleichung zweiten Grades der Zentralbewegung, die wiederum drei Gleichungen in gewöhnlicher Schreibweise äquivalent ist, erfordert zur Auflösung zwei Vektorintegralgleichungen oder eine Vektorintegralgleichung und drei gewöhnliche Integralgleichungen oder endlich sechs gewöhnliche Integralgleichungen. Eine Vektorintegralgleichung liefert der Flächensatz. Um diesen zu erhalten, multiplizieren wir Gleichung (1) vektoriell mit $\mathfrak{r}$, dann ist

$$m\left[\mathfrak{r}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] = m\,M\,F(r)\,[\mathfrak{r}\,\bar{\mathfrak{r}}] \equiv 0\,.$$

Die linke Seite können wir schreiben:

$$m\left(\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] - \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right]\right) \equiv m\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right].$$

Es ist also

$$\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \text{const.} = \mathfrak{A}\,, \tag{2}$$

eine Vektorintegralgleichung. $\mathfrak{A}$ ist ein konstanter Vektor, der auf $\mathfrak{r}$ und $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ senkrecht steht, und dessen absoluter Betrag dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten $\mathfrak{r}$ und $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ gleich ist. Dieses Dreieck ist die vom Radiusvektor (der Verbindungslinie der beiden anziehenden Punkte) in der Zeiteinheit überstrichene Fläche. Man nennt $\mathfrak{A}$ die Flächengeschwindigkeit der Masse m. Die Flächengeschwindigkeit ist bei der Zentralbewegung konstant. Da $\mathfrak{A}$ ein Vektor ist, der auf der Ebene der Bahntangente und der Verbindungslinie senkrecht steht, so sagt der Satz aus, daß jede Zentralbewegung eine ebene Bewegung ist.

Da

$$A = r \cdot v \cdot \sin(\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{v})\,,$$

wenn $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$ gesetzt wird, und $r \cdot \sin(\mathfrak{r}\,,\,\mathfrak{v})$ gleich der Länge der Normalen von dem anziehenden Massenpunkt auf die Bahntangente ist, so gilt der Satz:

Die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte der Bahn ist umgekehrt proportional dem senkrechten Abstand der Bahntangente in diesem Punkt von dem anziehenden Massenpunkt.

Eine skalare Integralgleichung der obigen Differentialgleichung erhalten wir aus dem Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Wir multiplizieren die Gleichung skalar mit

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt} + \bar{\mathfrak{r}}\frac{dr}{dt}\,. \tag{3}$$

Die skalare Multiplikation mit dem ersten Glied, einem

Vektor, der auf $\bar{\tau}$ senkrecht steht, ist Null, es bleibt daher als Resultat:

$$\bar{\tau}^2 \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \frac{dr}{dt} = M F(r) \frac{dr}{dt} \bar{\tau}^2,$$

oder, da $\bar{\tau}^2 = 1$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = M F(r) \frac{dr}{dt},$$

oder

$$\tfrac{1}{2} v^2 = M \int F(r)\, dr + \text{const.},$$

eine Gleichung, die den absoluten Betrag der Geschwindigkeit als Funktion der Entfernung gibt. $\frac{1}{2} m v^2$ ist die kinetische Energie, $-m M \int F(r)\, dr$ die potentielle Energie; die Gleichung sagt aus, daß die algebraische Summe der Energien bei der Zentralbewegung konstant bleibt.

§ 20. Differentiation einer Skalaren nach einer Skalaren in einer vorgegebenen Richtung.

(Totale Differentiation einer skalaren Funktion mehrerer Variabeln.)

Das totale Differential einer skalaren Funktion von zwei und mehr Variabeln ist aus einem Vektor ableitbar. Zum besseren Verständnis nehmen wir ein Beispiel zu Hilfe. Der Druck p eines Gases, dessen Zustandsgleichung $f(p, v, \vartheta) = 0$ bekannt sei, ist bestimmt durch das spezifische Volumen v und die absolute Temperatur ϑ; die Änderung des Druckes hängt von der Änderung dieser beiden Größen ab. Wir tragen den Druck auf der z-Achse, das spezifische Volumen auf der x-Achse, die Temperatur auf der y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ab, dann stellt $f(p, v, \vartheta) = 0$ die bekannte Fläche dar, deren Punkte das Ensemble aller möglichen Zustände des betreffenden Gases bilden. Wenn wir von einem beliebigen Punkt p_0, v_0, ϑ_0 zu dem benachbarten p_1, v_1, ϑ_1

auf der Fläche übergehen, so ist die Gesamtänderung des Druckes durch die Richtung und Entfernung bestimmt, in welcher $0, v_1, \vartheta_1$ zu $0, v_0, \vartheta_0$ liegt. In der zur xz-Ebene parallelen Richtung, in welcher nur v mit p sich ändert, ϑ aber konstant bleibt, ist die Änderung von p, bezogen auf die Längeneinheit $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta$, in der zur yz-Ebene parallelen Richtung $\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v$, wobei durch den Index die konstant zu haltende Größe angemerkt ist. Diese beiden Änderungen können wir als die zueinander senkrechten Komponenten eines in der xy-Ebene gelegenen Vektors ansehen, welchen wir durch $\mathfrak{d}'p$ bezeichnen wollen; wir können also schreiben:

$$\mathfrak{d}'p = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta \mathfrak{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v \mathfrak{j}.$$

Es stellt dies einen Ausdruck dar, aus dem wir die Änderung pro Längeneinheit von p in irgend einer der xy-Ebene parallelen Richtung ebenso ableiten können, wie wir die Größe einer Kraft (oder irgend eines anderen Vektors) in einer bestimmten Richtung aus der in der Kraftrichtung gegebenen Größe der Kraft ableiten. Wir multiplizieren zu diesem Zweck den Vektor skalar mit dem Einheitsvektor der vorgeschriebenen Richtung:

$$dn\,\mathfrak{n} = dv \cdot \mathfrak{i} + d\vartheta \cdot \mathfrak{j}.$$

Die Änderung $\mathfrak{d}'p$ in der Richtung $\mathfrak{n}$ ist also gegeben durch

$$\mathfrak{d}'p \cdot \mathfrak{n} = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta \frac{dv}{dn} + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v \frac{d\vartheta}{dn}.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta dv + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v d\vartheta = dp$$

nichts anderes als das totale Differential der Funktion p von ϑ und v. Danach ist

$$\mathfrak{d}'p \cdot \bar{\mathfrak{n}} = \frac{dp}{dn} .$$

Das totale Differential erscheint also hier als die Projektion des Vektors

$$\mathfrak{d}'p = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta \mathfrak{i} + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v \mathfrak{j}$$

auf die Richtung $dv\,\mathfrak{i} + d\vartheta\,\mathfrak{j}$, oder als die Projektion der größten auf die Längeneinheit bezogenen Änderung von p auf die Richtung, welche durch die willkürlich gegebene Größe der Änderungen dv und $d\vartheta$ bestimmt ist.

Es sei z. B. gefragt nach der Änderung des Druckes in Richtung der Adiabate, d. h. nach der Änderung des Druckes ohne Zufuhr oder Ableitung von Wärme aus dem System, oder mit anderen Worten, nach der Änderung des Druckes längs einer Linie, deren Punkte gleichen Entropiewerten entsprechen. Die Änderung soll also so geschehen, daß die Änderung der Entropie s Null ist, d. h.

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)_v d\vartheta + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\vartheta dv = 0 .$$

Da nach bekannten Gleichungen der Thermodynamik

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)_v = \frac{c_v}{\vartheta}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\vartheta = \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v$$

ist, worin c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bedeutet, so lautet die Bedingung:

$$\frac{c_v}{\vartheta} d\vartheta + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v dv = 0 .$$

Daher ist die in die $x\,y$-Ebene projizierte Richtung, in welcher die Änderung von p bestimmt werden soll,

$$d\boldsymbol{n}\cdot\bar{\mathfrak{n}}=\left\{-\frac{c_v}{\vartheta}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial\vartheta}\right)_v}\mathfrak{i}+\mathfrak{j}\right\}d\vartheta$$

und die Änderung selbst

$$d\boldsymbol{n}\,\bar{\mathfrak{n}}\cdot\mathfrak{d}'p=d\boldsymbol{p}=\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial\vartheta}\right)_v-\frac{c_v}{\vartheta}\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\vartheta}{\left(\frac{\partial p}{\partial\vartheta}\right)_v}\right\}d\vartheta\,,$$

woraus für den Fall idealer Gase, deren Zustandsgleichung $p\,v=(c_p-c_v)\,\vartheta$ ist, die bekannte Beziehung für adiabatische Änderung folgt:

$$p\left(\frac{\vartheta}{p}\right)^{c_p/c_v}=\text{const.}$$

§ 21. Die Operation ∇ bei skalarem Argument.

Dieselbe Betrachtung, die wir im vorigen Paragraphen für das Differential einer skalaren Funktion von zwei Variablen durchgeführt haben, läßt sich auch für den Fall der Abhängigkeit von drei und mehr Variablen anstellen. Enthält die skalare Funktion mehr als drei Variable, so erfordert freilich diese Behandlungsweise eine Erweiterung des Vektorbegriffes, nämlich die Definition eines Vektors in einem mehr als dreidimensionalen Raum. Da eine solche Erweiterung die eigentliche Aufgabe der bequemen und anschaulichen Formulierung geometrischer Betrachtungen nicht fordert, sondern vielmehr nur logisch formales Interesse bietet, legen wir dem Folgenden eine skalare Funktion zugrunde, die von drei reellen Argumenten abhängt.

Die Funktion sei $V(x, y, z)$. Die drei Variablen x, y, z fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im Raum mit den zueinander senkrechten Achsen x, y, z auf und tragen in jedem Punkt des Raumes den Wert

der Funktion V für diesen Punkt ein. Gehen wir von einem Punkt x_0, y_0, z_0 zu dem benachbarten x_1, y_1, z_1 über, so ändert sich V von V_0 zu V_1; und diese Änderung von V ist wieder von der Richtung, in der wir vorgegangen sind, abhängig. Die Änderungen in Richtung der Koordinatenachsen sind

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

dieselben können als Komponenten des Vektors

$$\mathfrak{d}' V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathfrak{k}$$

angesehen werden. Um die Bedeutung dieses Vektors zu erkennen, brauchen wir nur an eine selbstverständliche Eigenschaft aller Vektoren zu erinnern. Jeder Vektor (z. B. die Kraft) ist seinem absoluten Betrage nach größer als seine Projektion in irgend einer Richtung. Die Änderung, die durch den absoluten Betrag von $\mathfrak{d}' V$ angegeben ist, ist in der Richtung des Vektors $\mathfrak{d}' V$ am größten. Oder der Vektor $\mathfrak{d}' V$ gibt der Größe und Richtung nach die größte, auf die Längeneinheit bezogene Änderung der Funktion V an. Man bezeichnet diesen Vektor als den Gradienten der skalaren Größe an der Stelle x, y, z und schreibt ihn:

$$\text{grad } V \text{ oder nach Hamilton } \nabla V^{1}).$$

---

[1]) Das Zeichen ∇ ist der Form eines althebräischen Saiteninstrumentes nachgebildet, welches nabla genannt wird. Häufig findet man für den Vektor in entgegengesetzter Richtung das Zeichen: grad V angewendet. Andere Vorschläge zur Nennung des Zeichens ∇ sind „del“ (Gibbs-Wilson) und „Atled“ (Umkehrung von delta), die indessen nicht Eingang gefunden haben. „del“ dürfte der Einsilbigkeit und bequemen Aussprache halber ganz empfehlenswert sein.

Das auf die Längeneinheit bezogene totale Differential in der durch die Größen dx, dy, dz bestimmten Richtung erhalten wir durch skalare Multiplikation des Vektors mit dem Einheitsvektor

$$\bar{n} = \mathfrak{i}\frac{dx}{dn} + \mathfrak{j}\frac{dy}{dn} + \mathfrak{k}\frac{dz}{dn}$$

der gegebenen Richtung; es ist

$$(\nabla V \cdot \bar{n}) = \frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn}.$$

$(\nabla V \bar{n})$ ist Null, wenn die Richtungen der beiden Vektoren des skalaren Produktes senkrecht zueinander stehen, d. h. wenn die größte Änderung von V in einer zu $\bar{n}$ senkrechten Ebene liegt. Die größte Änderung von V im Punkte x, y, z geschieht also in einer Richtung, die senkrecht steht auf der Tangentialebene einer Fläche gleicher Werte von V; man nennt diese Fläche Niveau- oder Äquipotentialfläche und kann sagen: Der Gradient steht senkrecht zur Niveaufläche der Funktion V im betrachteten Punkt x, y, z.

Sehen wir von der Bezugnahme auf die Längeneinheit ab, so können wir sagen: Das totale Differential der skalaren Funktion V in der Richtung

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$

ist das skalare Produkt des Vektors ∇V in den Vektor $\mathfrak{a}$, also $(\mathfrak{a}\nabla V)$ oder $(\nabla V \cdot \mathfrak{a})$, worin

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ist. Statt dessen können wir symbolisch auch schreiben $(\mathfrak{a}\nabla)V$, wobei aber besonders hervorgehoben werden mag,

daß in der Klammer $(\mathfrak{a}\nabla)$ die beiden Zeichen nicht miteinander vertauscht werden dürfen, um nicht zu Mißverständnissen Anlaß zu geben; wie wir bald sehen werden, hat nämlich $(\nabla\mathfrak{a})$ als eine Differentialoperation an dem Vektor $\mathfrak{a}$ eine andere bestimmte Bedeutung. Es bezeichnet also $\mathfrak{a}\cdot\nabla$ den Differentialoperator

$$a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aus der Bedeutung des Zeichens ∇ geht unmittelbar hervor, daß

$$\nabla(U+V)=\nabla U+\nabla V,$$
$$\nabla(UV)=V\nabla U+U\nabla V,$$

und wenn c eine Konstante ist,

$$\nabla(cU)=c\nabla U.$$

Die inverse Operation, d. h. die Integration des Gradienten längs eines Weges, ergibt:

$$\int_1^2\nabla V\cdot d\mathfrak{n}=V_2-V_1,$$

entsprechend der Formel in gewöhnlicher Schreibweise:

$$\int_1^2\frac{dV}{dn}dn=V_2-V_1.$$

Man nennt dieses Integral das Linienintegral des Vektors ∇V oder des Gradienten von V. Für irgend zwei Wege mit demselben Endpunkt hat dieses Linienintegral den gleichen Wert. Es ist daher das Linienintegral eines Gradienten über einen geschlossenen Weg gleich Null. Umgekehrt folgt aus der Bedingung, daß jedes Linien-

integral eines Vektors über einen geschlossenen Weg Null sein soll, daß der Vektor als der Gradient einer skalaren Größe darstellbar ist. Wenn nämlich das Linienintegral über eine geschlossene Kurve Null ist, so kann das Linienintegral über ein Kurvenstück nicht vom Wege abhängen, sondern muß eine Funktion der Endpunkte sein, also

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_1} X\,ds = V(x_1\,y_1\,z_1) - V(x_0\,y_0\,z_0)\,.$$

Wir können die Endpunkte der beiden Vektoren $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_1$ beliebig nahe zusammenrücken, so daß links nur ein Glied, rechts ein Differential stehen bleibt:

$$X\,ds = dV\,.$$

$X\,ds$ ist also das totale Differential einer skalaren Größe V, dieses ist aber das Produkt des Gradienten von V in die Richtung, in der das totale Differential genommen werden soll. Es ist also

$$X\,ds = \operatorname{grad} V \cdot d\mathfrak{s}\,.$$

§ 22. Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe in einer vorgegebenen Richtung.

(Totale Differentiation eines Vektors.)

Die Änderung eines Vektors $\mathfrak{V}$ bei Änderung seiner unabhängigen Argumente x, y, z setzt sich zusammen aus den Änderungen seiner Komponenten. Hat der Vektor an der Stelle x_0, y_0, z_0 den Wert

$$\mathfrak{V} = V_1\,\mathfrak{i} + V_2\,\mathfrak{j} + V_3\,\mathfrak{k}$$

und an der Stelle x_1, y_1, z_1 den Wert

$$\mathfrak{V}' = V_1'\,\mathfrak{i} + V_2'\,\mathfrak{j} + V_3'\,\mathfrak{k}\,,$$

so gilt

$$\mathfrak{V} - \mathfrak{V}' = (V_1 - V_1')\,\mathfrak{i} + (V_2 - V_2')\,\mathfrak{j} + (V_3 - V_3')\,\mathfrak{k}\,.$$

Die auf die Längeneinheit bezogene Änderung des Vektors in einer vorgegebenen Richtung

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}$$

ist also gleich der vektorischen Summe der auf die Längeneinheit bezogenen Änderungen der Komponenten in der vorgegebenen Richtung:

$$(1)\qquad \frac{dV_1}{da}\,\mathfrak{i} + \frac{dV_2}{da}\,\mathfrak{j} + \frac{dV_3}{da}\,\mathfrak{k} = (\mathfrak{a}\,\nabla)\,V_1\,\mathfrak{i} + (\mathfrak{a}\,\nabla)\,V_2\,\mathfrak{j} + (\mathfrak{a}\,\nabla)\,V_3\,\mathfrak{k}\,.$$

Statt dessen wird symbolisch ohne Mißverständlichkeit $(\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{V}$ geschrieben. Das totale Differential eines Vektors in der Richtung $\mathfrak{a}$ ist daher durch den Ausdruck $(\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{V}$ gegeben.

In § 17 haben wir die zeitliche Änderung eines Vektors an der Stelle x, y, z berechnet. Ist der Vektor $\mathfrak{V}$ als Funktion von x, y, z bekannt, so stellt danach der Wert $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}$ die lokale Änderung des Vektors dar. Es sei nun der Vektor $\mathfrak{V}$ der Ausdruck einer Eigenschaft eines materiellen Trägers an der Stelle x, y, z; und es sei nach der Änderung dieses auf denselben Träger bezüglichen Vektors in dem Zeitelement gefragt, in welchem der Träger von x, y, z zu der benachbarten Stelle in der Entfernung $d\mathfrak{r} = \mathfrak{v} \cdot dt$ sich bewegt. Die Änderung des Vektors in der Richtung $d\mathfrak{r}$ ist nach dem Ebengesagten

$$(d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{V}\,.$$

Die gesuchte gesamte Änderung des Vektors in

der Zeiteinheit dt setzt sich, wenn man von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung absieht, aus diesen beiden Teilen zusammen, nimmt also die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B}\,. \tag{2}$$

Im Gegensatz zu dem ersten Glied auf der rechten Seite, der lokalen Änderung mit der Zeit, bezeichnet man das zweite als die stationäre Änderung. Ist nämlich das erste Glied Null, d. h. ist die durch den Vektor $\mathfrak{B}$ angegebene Eigenschaft nur eine Funktion des Raumes und wird immer auf den gerade ankommenden materiellen Träger übertragen, so spricht man von einer stationären Strömung.

In gleicher Weise ergibt sich als gesamte zeitliche Änderung einer skalaren Eigenschaft V eines materiellen Trägers, der seinen Ort mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ändert, der Ausdruck:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)V\,. \tag{3}$$

§ 23. Die Operation ∇ bei vektoriellem Argument.

Die Anwendung des Hamiltonschen Operators:

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

auf Vektoren führt zu Formeln von physikalischer Wichtigkeit. Es ist

$$\nabla\mathfrak{B} = \mathfrak{i}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}$$

zunächst nur eine symbolische Schreibweise, die einer

näheren Definition bedarf. Führen wir in die Gleichung die Vektorkomponenten ein, so kommt:

$$\begin{aligned}\nabla \mathfrak{V} = \mathfrak{i}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial x}\mathfrak{k}\right\} \\ + \mathfrak{j}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial y}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial y}\mathfrak{k}\right\} \\ + \mathfrak{k}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial z}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial z}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\mathfrak{k}\right\}\end{aligned}$$

und es entsteht die Frage, wie die Multiplikation zwischen je zwei vektoriellen Faktoren zu verstehen sei. Wegen der hier vorhandenen Zweideutigkeit sind beide Fälle zu untersuchen: die skalare und die vektorielle Multiplikation; um Mißverständnisse zu vermeiden, schreiben wir die skalare Multiplikation $\nabla \mathfrak{V}$ oder $(\nabla \mathfrak{V})$ oder $\nabla \cdot \mathfrak{V}$, die vektorielle $[\nabla \mathfrak{V}]$ oder $\nabla \times \mathfrak{V}$.

Es folgt nach den Regeln der skalaren Multiplikation:

$$(1) \qquad \nabla \mathfrak{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

ein sehr einfacher und wichtiger Differentialausdruck zwischen den Komponenten des Vektors. $\nabla \mathfrak{V}$ ist offenbar eine skalare Größe.

Nach den Regeln der Vektormultiplikation ergibt sich:

$$(2) \quad \begin{cases} [\nabla \mathfrak{V}] = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right), \end{cases}$$

statt dessen können wir die formale Schreibweise benutzen:

$$[\nabla \mathfrak{V}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}.$$

Sie hat eine ähnliche Form wie das Vektorprodukt zweier Vektoren; der Hamiltonsche Operator spielt durchaus die Rolle eines gewöhnlichen Vektors, und es kann bei der Rechnung mit diesem Operator genau nach den gleichen Regeln verfahren werden, als ob das Zeichen ∇ ein selbständiger Vektor sei.

§ 24. Die skalare Operation ∇ bei vektoriellem Argument. Integralsatz von Gauß.

Um die physikalische Bedeutung der Differentialprodukte abzuleiten, wenden wir diese Symbole auf bekannte Beispiele an. Zunächst soll es sich um $\nabla \mathfrak{V}$ handeln:

In § 13 wurde als Beispiel eines skalaren Produktes dreier Vektoren die mit „Kraftfluß eines Vektors" bezeichnete Größe eingeführt. Danach ist der Kraftfluß des Vektors $\mathfrak{V}$ durch ein Flächenelement $d\sigma$ von vorgegebener Richtung gleich $dw = \mathfrak{V} \cdot d\sigma$. Es sei nun die Aufgabe gestellt, den Kraftfluß des von den Ortskoordinaten abhängigen Vektors $\mathfrak{V}$ durch eine beliebig vorgelegte, geschlossene Fläche mit den Elementen $d\sigma$, deren Normalen nach außen gerichtet sein mögen, zu berechnen. Der Kraftfluß ist

$$(1)\quad w = \int_{\sigma} \mathfrak{V} \cdot d\sigma = \int_{\sigma} (V_1\, dy\, dz + V_2\, dz\, dx + V_3\, dx\, dy).$$

$V_1\, dy\, dz$ ist der Kraftfluß des Vektors $\mathfrak{V}$ an der Stelle x, y, z durch die Projektion von $d\sigma$ in die yz-Ebene.

Wir greifen ein bestimmtes Oberflächenelement do an der Stelle x, y, z des Raumes heraus und errichten darüber als Basis einen zur yz-Ebene senkrechten Zylinder, der also in der yz-Ebene die Projektion, $dy\,dz$, von do herausschneidet und die der Betrachtung zugrunde gelegte Fläche mindestens noch einmal, jedenfalls aber eine gerade Anzahl mal durchsetzt. Der erste Teil des Integrals erfordert eine Summierung der Projektionen sämtlicher mit V_1 multiplizierter Oberflächenelemente auf die yz-Ebene. Diese Summierung führen wir in der Weise aus, daß wir zunächst die Summe der mit demselben $dy\,dz$ multiplizierten V_1 bilden und dann diese Beträge über die ganze yz-Ebene summieren.

Das Durchsetzen mag an den Stellen x_0, x_1, x_2, x_3 ... geschehen. Ist an der Stelle x_0 der Wert von V_1 gleich $V_1^{(0)}$, so ist er an der Stelle x_1 gleich

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dx + V_1^{(0)},$$

an der Stelle x_3 entsprechend

$$\int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dx + V_1^{(2)} \quad \text{usf.}$$

Bei der Summation aller auf $dy\,dz$ bezüglichen Werte von V_1 müssen wir nun bedenken, daß die Normalen der Projektionen der Oberflächenelemente an zwei aufeinanderfolgenden Durchsetzungsstellen entgegengesetzte Richtung haben infolge der Festsetzung, daß die Normalen der geschlossenen Fläche sämtlich nach außen gerichtet sein sollen. Das eine Mal ist also $dy\,dz$ mit dem positiven, das andere Mal mit dem negativen Zeichen zu ver-

sehen. Die Summe hat daher, da wir wegen der getroffenen Festsetzung der Normalenrichtung an der geschlossenen Fläche die Normale der Projektion des Oberflächenelementes an der ersten Durchsetzungsstelle in der negativen x-Richtung annehmen müssen, den folgenden Wert:

$$\mathsf{S} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dx + \ldots$$

Die mit $dy\,dz$ multiplizierte Summe S von Integralen ist gerade die Summe aller mit $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ multiplizierten Volumenelemente $d\tau$, die in dem Zylinder über der Basis $dy\,dz$ innerhalb der betrachteten Oberfläche liegen. Das Integral

$$\int \mathsf{S}\, dy\, dz$$

ausgedehnt über die ganze Ebene yz ist daher die Summe aller mit $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ multiplizierten Volumenelemente, die innerhalb der vorgelegten Oberfläche liegen. Wir schreiben infolgedessen:

$$(2)\quad \int V_1\, dy\, dz = \int \mathsf{S}\, dy\, dz = \int \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int \frac{\partial V_1}{\partial x}\, d\tau .$$

Ebenso gilt:

$$\int V_2\, dx\, dz = \int \frac{\partial V_2}{\partial y}\, d\tau$$

$$\int V_3\, dy\, dx = \int \frac{\partial V_3}{\partial z}\, d\tau .$$

Durch Addition folgt:

$$(3)\quad w = \int \mathfrak{V} \cdot d\mathfrak{o} = \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) d\tau = \int V \mathfrak{V}\, d\tau .$$

Der Kraftfluß eines Vektors $\mathfrak{B}$ durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich dem Integral über die mit $\nabla\mathfrak{B}$ multiplizierten Volumenelemente des von der Oberfläche eingeschlossenen Raumes. Schließt die Oberfläche nur ein Volumenelement ein, so können wir sagen, der Kraftfluß des Vektors $\mathfrak{B}$ durch die Oberfläche eines unendlich kleinen Volumenelementes, bezogen auf die Volumeneinheit, ist die auf den Vektor $\mathfrak{B}$ skalar ausgeübte Hamiltonsche Operation ∇; es ist

$$(4) \qquad \nabla\mathfrak{B} = \operatorname*{Lim}_{(d\tau=0)} \frac{\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o}}{d\tau} .$$

Statt dessen können wir sagen: $\nabla\mathfrak{B}$ ist die auf die Längeneinheit bezogene Änderung des von $\mathfrak{B}$ herrührenden, auf die Flächeneinheit bezogenen Kraftflusses, wenn wir in der Richtung des Vektors vorgehen. Die Gleichung (3) ist bekannt unter dem Namen: Integralsatz von Gauß und gibt die Transformation eines Flächenintegrals in ein Raumintegral oder umgekehrt.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, daß das Vorzeichen von $\nabla\mathfrak{B}$ von der Festsetzung der Richtung der Flächennormale abhängig ist; daß $\nabla\mathfrak{B}$ also eine pseudoskalare Größe ist. Wir wollen stets an der obigen Bestimmung festhalten.

§ 25. Anwendungen. Die Bezeichnung Divergenz.

Ist durch den Vektor $\mathfrak{B}$ ein Wärmestrom in einem Körper der Richtung und Größe nach bezeichnet, d. h. die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch die zur Richtung von $\mathfrak{B}$ senkrecht gelegene Flächeneinheit hindurchtritt, so ist die Wärmemenge, die durch das Flächenelement

$d\sigma$ von beliebig vorgegebener Richtung hindurchgeht, der Vektorfluß durch dieses Flächenelement, gleich $\mathfrak{B} \cdot d\sigma$. Der Wärmefluß, der durch eine geschlossene Fläche im Körper hindurchtritt, ist die Wärmemenge, die in das von der Fläche eingeschlossene Volumen eintritt und die zur Energievermehrung dieses Volumens dient. Wird in dem Volumen keine innere oder äußere Arbeit geleistet, so wird die Wärmemenge eine Temperaturerhöhung hervorrufen. Wenn c die spezifische Wärme und ϱ die Dichte des Körpers bezeichnet, so ist die Wärmemenge, die eine Temperaturerhöhung $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ des Volumens $d\tau$ in der Zeiteinheit bewirkt: $c\varrho \frac{\partial \vartheta}{dt} d\tau$. Dies ist also gleichzusetzen: $\nabla \mathfrak{B} \cdot d\tau$ oder:

$$\nabla \mathfrak{B} = c\varrho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Bezeichnet der Vektor $\mathfrak{B}$ eine Flüssigkeitsströmung, so ist der Vektorfluß durch eine Fläche gleich der durch die Fläche pro Zeiteinheit hindurchtretenden Flüssigkeitsmenge. Die Inkompressibilitätsbedingung von Flüssigkeiten verlangt, daß in eine geschlossene Fläche nicht mehr Flüssigkeit ein- als austritt, d. h. die Menge der im ganzen eintretenden Flüssigkeit, der Fluß durch die geschlossene Fläche, ist Null. Die Inkompressibilitätsbedingung lautet also in Vektorschreibweise:

$$\nabla \mathfrak{B} = 0.$$

Ist ein Vektorfeld so beschaffen, daß in Volumenelementen an gewissen Stellen des Raumes $\nabla \mathfrak{B}$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt, so wird in diesen Elementen ein Teil der durch den Vektor mitgeführten

Menge (z. B. Wärmemenge oder Flüssigkeitsmenge) erzeugt oder vernichtet. Im Fall der Wärmeströmung ist dieses Entstehen oder Verschwinden vorstellbar, indem der entstehenden resp. verschwindenden Wärmemenge eine Abnahme oder Zunahme der inneren Energie des Volumenelementes entspricht. Bei Betrachtung der Flüssigkeitsströmung, die wir gewohnt sind als inkompressibel anzusehen, ist eine solche Vorstellung, weil sie das Verschwinden oder Entstehen von Materie im Raum erfordert, etwas erzwungen, wird aber leicht dadurch vermittelt, daß man Materie, die der oberflächlichen Betrachtung durch irgend etwas entzogen ist, als nicht vorhanden betrachtet. So kommt man dazu, von solchen Volumenelementen, von denen eine größere Menge durch den betreffenden Vektor fort- als zugeführt wird, als von Quellgebieten und Quellpunkten zu reden. Punkte, in denen eine größere Menge zu- als fortgeführt wird, nennt man Senken (negative Quellen). Die Menge, die positiv oder negativ zugeführt wird, also $\nabla \mathfrak{V}$, wird Ergiebigkeit, Divergenz, der Quelle genannt. Man hat aus dieser Bedeutung an Stelle $\nabla \mathfrak{V}$ das Zeichen $\operatorname{div} \mathfrak{V}$ abgeleitet, welches allgemein üblich geworden ist.

§ 26. Die vektorielle Operation ∇. Die Rotation.

Um die Bedeutung der Operation $[\nabla \mathfrak{V}]$ zu erkennen, knüpfen wir an die schon öfter benutzte Gleichung an:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \bar{\mathfrak{r}} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}. \tag{1}$$

Wählen wir als Anfangspunkt von $\mathfrak{r}$ den momentanen Krümmungsmittelpunkt der Bahn des sich bewegenden Punktes, so ist $\frac{dr}{dt} = 0$ und

$$\mathfrak{v} = r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt} = r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

wenn ds ein Element der Bahn ist. Wollen wir auf diese Funktion die vektorielle Operation ∇ ausüben, so können die darin geforderten Differentiationen beim Übergang zu dem in der Bahn des Mobils benachbart gelegenen Punkt sich nur auf den Teil $r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{ds}$ beziehen, nicht aber auf die Änderung des absoluten Betrages der Geschwindigkeit; $\frac{ds}{dt}$ ist also hierbei konstant zu halten. Aus der Bedeutung von $\mathfrak{r}$ als Krümmungsradius folgt weiter, daß

$$\left[\bar{\mathfrak{r}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\right] = \left[\bar{\mathfrak{r}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{ds}\right]\frac{ds}{dt} = \mathfrak{u}$$

gleichfalls konstant bleibt. $\mathfrak{v}$ können wir aber in die Form bringen:

$$\mathfrak{v} = -\frac{ds}{dt}\left[\mathfrak{r}\left[\bar{\mathfrak{r}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\right]\right] = -[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]$$

zufolge der Identität

$$\bar{\mathfrak{r}}\left(\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\mathfrak{r}\right) \equiv 0.$$

Es ist also

$$[\nabla\mathfrak{v}] = -[\nabla[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]]_{\mathfrak{u}} = [\nabla[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]]_{\mathfrak{u}}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß der Klammerausdruck rechts sich auf $2\,\mathfrak{u}$ reduziert, so daß wir erhalten:

$$[\nabla\mathfrak{v}] = 2\left[\bar{\mathfrak{r}}\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\right] = 2\,\mathfrak{u}. \tag{2}$$

Es ist nun nach § 17 $\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}$ die Winkeländerung des

Vektors $\bar{\mathfrak{r}}$ in der Zeiteinheit, das also, was man in der gewöhnlichen Analysis die Winkelgeschwindigkeit zu nennen pflegt. Dieser Begriff besitzt die charakteristischen Merkmale eines Vektors, denn zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ist neben der Angabe des absoluten Betrages auch die Angabe der Richtung der Drehungsachse notwendig. Wir müssen also konsequenterweise die Winkelgeschwindigkeit als einen Vektor definieren, der auf der Ebene des Krümmungskreises senkrecht steht und dem absoluten Betrag von $\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}$ proportional ist. Der Vektor $\mathfrak{w}$ der Winkelgeschwindigkeit ist also proportional $\left[\bar{\mathfrak{r}}\,\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\right]$. Wenn wir die Größe dieses Vektors gleich dem doppelten Inhalt der vom Radius 1 in der Zeiteinheit überstrichenen Fläche setzen, so bleiben die Resultate, auch in formaler Übereinstimmung mit denen der gewöhnlichen Analysis. Dann ist

$$\mathfrak{w} = \left[\bar{\mathfrak{r}}\,\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\right] = \mathfrak{u} \tag{3}$$

und

$$[\nabla \mathfrak{v}] = 2\,\mathfrak{w}\,. \tag{4}$$

Die Operation ∇ vektoriell auf die momentane Geschwindigkeit des Mobils ausgeübt, und zwar in Richtung der Bahn, ergibt die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Mobils im Krümmungskreis der Bahn.

Wegen dieser Beziehung hat man diese Operation als Rotation oder Wirbel, curl und Quirl bezeichnet und schreibt:

$$[\nabla \mathfrak{v}] = \mathrm{curl}\,\mathfrak{v} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\,. \tag{5}$$

Um indessen der Verwechslung zwischen „Rotation des Vektors $\mathfrak{v}$“ und Rotationsgeschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit, die nur die Hälfte der Rotation ist, vorzubeugen, wird von dieser Bezeichnung wenig Gebrauch gemacht.

Aus der Komponentendarstellung:

$$(6)\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

folgt unmittelbar, daß $\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 0$ ist, wenn $\mathfrak{v}$ der Gradient einer skalaren Größe ist, also etwa $\mathfrak{v} = \nabla\varphi$, denn dann sind die Unterdeterminanten Null. Ist dagegen $\operatorname{curl}\mathfrak{v} \neq 0$, so muß nach § 21 das Integral $\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}$ vom Integrationswege abhängen und über eine geschlossene Kurve von Null verschieden sein.

§ 27. Satz von Stokes.

Wenn das über eine geschlossene Kurve genommene Integral $\int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{s}$ nicht Null ist, so läßt es sich durch den Vektor $\operatorname{curl}\mathfrak{B}$ darstellen.

Es sei zunächst eine ganz bestimmte Kurve vorgelegt, längs der die Integration ausgeführt werden soll, nämlich die Umrandung eines Parallelogrammes $\bar{\mathfrak{v}}\, do = d\mathfrak{v}$ von unendlich kleinem Flächeninhalt mit den Seiten $d\mathfrak{r}$ und $\delta\mathfrak{r}$ an der Stelle x, y, z (Fig. 9). In den Mittelpunkten 1, 2, 3, 4 der vier Seiten seien die Werte des stetig sich ändernden Vektors $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ bezeichnet. Dann ist

$$(1)\quad \begin{cases} \int_1^1 \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = \mathfrak{V}_1\, d\mathfrak{r} + \mathfrak{V}_2\, \delta\mathfrak{r} - \mathfrak{V}_3\, d\mathfrak{r} - \mathfrak{V}_4\, \delta\mathfrak{r} \\ \qquad\qquad = d\mathfrak{r}(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_3) - \delta\mathfrak{r}(\mathfrak{V}_4 - \mathfrak{V}_2)\,. \end{cases}$$

$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_3$ ist nun die Änderung des Vektors $\mathfrak{V}$ an der Stelle x, y, z in der Richtung $-\delta\mathfrak{r}$ auf dem Stück $\delta\mathfrak{r}$, $\mathfrak{V}_4 - \mathfrak{V}_2$ die in Richtung $-d\mathfrak{r}$ auf dem Stück $d\mathfrak{r}$; wir können also schreiben:

$$(2)\qquad -\int_1^1 \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = (\delta\mathfrak{r}\nabla)\,\mathfrak{V}\cdot d\mathfrak{r} - (d\mathfrak{r}\nabla)\,\mathfrak{V}\cdot\delta\mathfrak{r}\,.$$

Benutzen wir nun die Bemerkung, daß wir mit dem Operationszeichen ∇ genau so verfahren können wie mit einem Vektor, so dürfen wir nach den Regeln der Multiplikation von Vektoren die folgenden Umformungen vornehmen. Die einzige Vorsicht, die wir dabei walten lassen müssen, ist, daß auf die Reihenfolge der Zeichen geachtet werden muß. Ferner ist zu bedenken, daß am Schlusse der Transformation, in welcher Reihenfolge die Zeichen auch stehen mögen, die durch das Zeichen ∇ geforderten Differentiationen sich auf den Vektor $\mathfrak{V}$ beziehen, während $\delta\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{r}$ konstante Größen bedeuten.

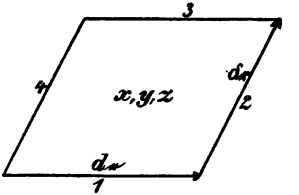

Fig. 9.

$$(2)\quad \begin{cases} -\int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = (\delta\mathfrak{r}\nabla)(\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}) - (d\mathfrak{r}\nabla)(\mathfrak{V}\,\delta\mathfrak{r}) \\ \qquad = (\nabla\,\delta\mathfrak{r})(\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}) - (\nabla\, d\mathfrak{r})(\mathfrak{V}\,\delta\mathfrak{r}) \\ \qquad = [\nabla\mathfrak{V}]\,[\delta\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}] \\ \qquad = \operatorname{curl}\mathfrak{V}\cdot[\delta\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}] = -\operatorname{curl}\mathfrak{V}\cdot d\mathfrak{o}\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß

$$\text{curl}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{d} = \operatorname*{Lim}_{do=0}\cdot\frac{\int\mathfrak{B}\,ds}{do} \tag{4}$$

ist, wobei es nun offenbar gleichgültig ist, ob $\mathfrak{d}\,do$ ein Parallelogramm oder ein beliebig begrenztes, unendlich kleines Flächenelement darstellt. Die Beziehung (4) sagt aus, daß das Linienintegral eines mit dem Wegelement skalar multiplizierten Vektors, nach Division durch die von der Integrationskurve umschlossene, unendlich kleine Fläche, einem Grenzwert sich nähert, der gleich ist der Wirbelkomponente jenes Vektors in Richtung der Flächennormale an der von der Integrationskurve umschlossenen Stelle.

Oder der curl eines Vektors $\mathfrak{B}$ an einer Stelle x, y, z ist gleich dem Grenzwert, dem sich das Linienintegral über den Vektor $\mathfrak{B}$ längs einer Kurve nähert, welche ein zur Richtung des Wirbels senkrechtes, unendlich kleines Flächenelement umschließt, nachdem das Integral durch Division mit dem Inhalt des Flächenelementes auf die Flächeneinheit bezogen ist.

Zu dem Stokesschen Satz, der eine Transformation eines Linien- in ein Flächenintegral oder umgekehrt darstellt, gelangen wir, wenn wir die in Gleichung (3) berechnete Größe $\text{curl}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{d}\,do$ über eine Fläche F integrieren, die wir uns in lauter Flächenelemente der betrachteten Art zerlegt denken können. Die linke Seite der Gleichung (3) geht dadurch in die Summe der Linienintegrale über die Umrandungen sämtlicher Flächenelemente über. Da nun aber (vgl. Fig. 10) die Umrandungen zweier benachbarter Flächenelemente hierbei teilweise

sich decken und diese Stücke bei der Integration in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, so ist die Summe aller Linienintegrale gleich dem Linienintegral über $\mathfrak{B}\, d\mathfrak{s}$ längs der Umrandung der Fläche F. Es ist also

$$\int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{s} = \int \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{o} \,. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt den Satz von Stokes dar.

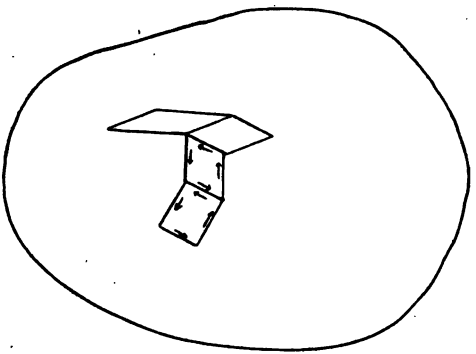

Fig. 10.

Aus Gleichung (5) folgt der wichtige Satz, daß

$$\int \operatorname{curl} \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o}$$

über eine geschlossene Fläche Null ist, da das Integral auf der linken Seite verschwindet.

§ 28. Anwendung.

Gleichung (3) des vorigen Paragraphen können wir dazu benutzen, für das totale Differential, das nach § 22 durch $(\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{B}$ dargestellt werden kann, eine andere Form abzuleiten. Indem wir auch durch die Schreibweise an-

deuten wollen, daß die Änderung von $\mathfrak{V}$ längs einer sehr kleinen Strecke in der Richtung a geschehen soll, schreiben wir das totale Differential $(da\,\nabla)\,\mathfrak{V}$. Wir ersetzen in der genannten Gleichung dr durch da, dann ist

$$(1) \qquad [\operatorname{curl}\mathfrak{V}\,da]\,\delta r = (da\,\nabla)\,\mathfrak{V}\cdot\delta r - \nabla(\mathfrak{V}\,da)\,\delta r\,.$$

Nach den Regeln der Multiplikation können wir statt dessen schreiben:

$$\delta r\,\{[\operatorname{curl}\mathfrak{V}\,da] + \nabla(\mathfrak{V}\,da) - (da\,\nabla)\,\mathfrak{V}\} = 0\,.$$

Da diese Gleichung identisch erfüllt sein muß, welchen Wert der Vektor δr auch annimmt, so muß der Klammerausdruck identisch Null sein, d. h. das totale Differential des Vektors $\mathfrak{V}$ in der Richtung des Vektors da ist

$$(2) \qquad (da\,\nabla)\,\mathfrak{V} = [\operatorname{curl}\mathfrak{V}\,da] + \nabla(\mathfrak{V}\,da)_{da}\,,$$

wobei anzumerken ist, daß da bei der Differentiation konstant gehalten werden muß, was wir durch den Index anzeigen wollen.

Die Formel (2) des § 22 geht dadurch über in:

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t} + [\operatorname{curl}\mathfrak{V}\cdot\mathfrak{v}] + \nabla(\mathfrak{V}\,\mathfrak{v})_{\mathfrak{v}}\,.$$

Ist der Vektor $\mathfrak{V}$ der Geschwindigkeitsvektor des Punktes selbst, so erhalten wir die spezielle Form:

$$(4) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\nabla\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\operatorname{curl}\mathfrak{v}]\,.$$

Es mag hier noch die Gesamtänderung des Kraftflusses durch eine Fläche F in der Zeit dt berechnet werden, also:

$$\frac{d}{dt}\int\mathfrak{V}\cdot d\mathfrak{o}\,.$$

$\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o}$ ist eine skalare Größe, es ist also nach Gleichung (3) des § 22:

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o} + (\mathfrak{v}\nabla)\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o}\,.$$

Das letzte Glied bedeutet die Änderung des Kraftflusses pro Zeiteinheit, wenn die durchströmte Fläche sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt. Die Fläche durchstreicht im allgemeinen bei der Bewegung einen Raum, der begrenzt ist erstens durch die Größe und Lage der Fläche $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ zu Beginn und zu Ende der Bewegung und zweitens durch die bei der Bewegung von der Umrandung $\mathfrak{s}$ der Fläche bestrichene Fläche. Der aus diesem geschlossenen Raum austretende Kraftfluß ist

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o})\,.$$

Bezüglich der Normale von $d\mathfrak{o}$ setzen wir fest, daß sie mit der Bewegungsrichtung $\mathfrak{v}$ einen spitzen Winkel bilde, dadurch ist die Richtung der Umrandung $\mathfrak{s}$ festgelegt und zwar so, daß $[d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{v}]$ ein Oberflächenelement des betrachteten Raumes mit einer nach außen weisenden Normale ist. Subtrahieren wir von diesem Kraftfluß den, welcher durch die Fläche

$$\int [d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{v}]$$

heraustritt, welche $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ verbindet, so erhalten wir den Kraftfluß, welcher durch die beiden Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ austritt. Das ist aber gerade die gesuchte Änderung des Kraftflusses, wenn die Fläche $\mathfrak{F}_1$ in $\mathfrak{F}_2$ übergeht. Es ist also

$$(\mathfrak{v}\nabla)\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div} \mathfrak{B}\,(\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}) + \int \mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s}]\,,$$

und mit Benutzung des Satzes von Stokes

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathfrak{v}\nabla)\int \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o} = \int \operatorname{div} \mathfrak{B}\,(\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}) + \int [\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{s} \\ \qquad\qquad = \int \operatorname{div} \mathfrak{B}\,(\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}) + \int \operatorname{curl} [\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{o}\,, \end{cases}$$

folglich ist

$$(6)\quad \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} = \int\left\{\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} + \mathrm{curl}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\right\} d\mathfrak{o}\,.$$

Die Änderung des Kraftflusses durch eine geschlossene Fläche ist daher

$$(7)\quad \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} = \int\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}\right) d\mathfrak{o}\,.$$

§ 29. Bewegung eines starren Körpers.

Die relative Geschwindigkeit irgend eines Punktes M_1 gegen einen Punkt M_2 ist durch die Gleichung gegeben:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \bar{\mathfrak{r}}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\,,$$

wenn der Vektor $\mathfrak{r}$ die Verbindung der beiden Punkte M_1, M_2 bedeutet. Sind die beiden Punkte starr miteinander verbunden, so kann die Entfernung sich nicht ändern, infolgedessen muß $\frac{dr}{dt} = 0$ sein. Der Rest

$$(1)\quad \mathfrak{v} = r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}$$

sagt aus, daß die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ immer senkrecht zu der Verbindungslinie der Punkte gerichtet ist, deren relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gesucht wird. Gleichung (1) stellt die allgemeine relative Bewegungsform der Punkte eines starren Körpers gegen irgend einen mit dem Körper fest verbundenen Punkt O dar. Hat der Punkt selbst die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, so ist, wenn $\mathfrak{r}$ die Entfernung der Punkte von diesem Bezugspunkte ist, die allgemeine Bewegungsform der Punkte eines starren Körpers:

$$(2)\quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + r\frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}\,.$$

Dieses Resultat läßt sich, wenn man bedenkt, daß

$$\bar{\tau}\left(\frac{d\bar{\tau}}{dt}\tau\right) \equiv 0$$

und τ der Krümmungsradius der Bahn der relativen Bewegung ist, auch so schreiben (vgl. § 26):

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + (\bar{\tau}\,\tau)\,\dfrac{d\bar{\tau}}{dt} - \left(\dfrac{d\bar{\tau}}{dt}\tau\right)\bar{\tau} \\ \quad = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\,, \end{cases}$$

worin $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Mobils um den Punkt O darstellt. Die Geschwindigkeit ist zusammengesetzt aus einem translatorischen Teil $\mathfrak{v}_0$ des ganzen starren Körpers und einem rotatorischen Teil um einen willkürlich vorgegebenen Punkt. Mit Änderung des Bezugspunktes O mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, von welchem die Entfernung bis zu dem Punkt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gemessen ist, ändert sich der Vektor $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]$. Es ist beim Übergang von O zu dem Bezugzpunkt O' in der Entfernung und Richtung $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}']$$

oder nach Gleichung (3), da $\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}]$ ist,

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] - [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']\,.$$

$\mathfrak{u}$ behält also bei diesem Übergang denselben Wert. Wenn $\mathfrak{v}_0'$ parallel zu $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}']$ ist, was sich durch geignete Wahl von $\mathfrak{a}$ stets erreichen läßt, wie leicht zu sehen ist, so spricht man von einer Schraubenbewegung; dieselbe geht in eine reine Rotation über, wenn $\mathfrak{v}_0' = 0$ wird.

Die Beschleunigung eines Punktes eines starren Körpers erhalten wir durch Differentiation von Gleichung (3) nach t:

$$(4) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} + [\mathfrak{u}\,,\,\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0] + \left[\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\,,\,\mathfrak{r}\right],$$

worin sich wieder $\mathfrak{v}_0$ auf die Geschwindigkeit des Punktes bezieht, von dem aus die Entfernung $\mathfrak{r}$ gerechnet ist.

Es seien hier endlich noch die leicht zu verifizierenden Gleichungen angeschrieben, die durch Anwendung der Differentialoperation ∇ auf die relative Geschwindigkeits- resp.

Beschleunigungsverteilung der Punkte des starren Körpers gewonnen werden:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{u}$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

$$\operatorname{curl}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 2\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{curl}\mathfrak{v}$$

$$\operatorname{div}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{curl}\mathfrak{v})^2.$$

§ 30. Trägheitsmomente und Eulersche Gleichungen.

Die lebendige Kraft T des Systems von n starr miteinander verbundenen Massenpunkten mit den Massen m_i ergibt sich zu:

$$(1)\quad T = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i\,\mathfrak{v}_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i\,\{\mathfrak{v}_0^2 + [\mathfrak{u}, \mathfrak{r}_i]^2 + 2\,\mathfrak{v}_0\,[\mathfrak{u}, \mathfrak{r}_i]\}\ .$$

Die lebendige Kraft eines starren Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung ist, wenn das Verhältnis der Masse dm in dem Volumenelement $d\tau$ zu diesem Element die Dichte ϱ ist,

$$(2)\qquad T = \tfrac{1}{2}\int \varrho\,(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}, \mathfrak{r}])^2\,d\tau\ .$$

$\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$ sind konstante Größen für alle Punkte des starren Systems. In dem Ausdruck der lebendigen Kraft fallen also die doppelten Produkte $2\,\mathfrak{v}_0\,[\mathfrak{u}, \mathfrak{r}]$ fort, wenn $\sum_i m_i \mathfrak{r}_i$ resp. $\int \varrho\,\mathfrak{r}\,d\tau = 0$ ist. Nun bezeichnet

$$(3)\qquad \sum_i m_i \mathfrak{r}_i\ ,\quad \text{resp.}\quad \int \varrho\,\mathfrak{r}\,d\tau = m\,\mathfrak{r}_0$$

den Ort des Massenmittelpunktes, des Schwerpunktes. Ausdruck (3) wird Null, wenn $\mathfrak{r}_0 = 0$ ist, d. h. der Bezugspunkt mit dém Schwerpunkt zusammenfällt. In diesem Fall ist $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, in der Tat ist dann

$$(4)\qquad \int \varrho\,\mathfrak{v}\,d\tau = \int \varrho\,\mathfrak{v}_0\,d\tau = m\,\mathfrak{v}_0\ ,$$

da

$$\int \varrho\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\,d\tau = [\mathfrak{u}\int \varrho\,\mathfrak{r}]\,d\tau = 0$$

ist. Der Ausdruck der lebendigen Kraft geht dadurch über in:

$$(5)\qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}\int \varrho\,(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}])^2\,d\tau \\ \quad = \frac{1}{2}\int \varrho\,(\mathfrak{v}_0^2 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]^2)\,d\tau \\ \quad = \frac{1}{2}\int \varrho\,(\mathfrak{v}_0^2 + \mathfrak{u}^2\,\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})^2)\,d\tau\,. \end{cases}$$

Die Gleichung (5) können wir als eine Bestimmungsgleichung des absoluten Betrages von $\mathfrak{u}$ für einen vorgegebenen Wert der lebendigen Kraft der Bewegung des starren Körpers betrachten. Sie ist eine skalare Gleichung zweiten Grades in $\mathfrak{u}$, stellt also eine Fläche zweiten Grades dar. Nach der Bedeutung von $\mathfrak{u}$ gibt der Radiusvektor dieser Fläche in irgend einer Richtung die Größe der Winkelgeschwindigkeit des starren Systems um die in diese Richtung fallende Achse an, wenn die lebendige Kraft der Rotationsbewegung des Systems um den Schwerpunkt den vorgegebenen Wert

$$T - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{v}_0^2 \int \varrho \cdot d\tau$$

behält. Statt Gleichung (5) schreiben wir ausführlicher:

$$(6)\qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}\,m\,\mathfrak{v}_0^2 + \frac{1}{2}\,u_1^2 \int \varrho\,(r_2^2 + r_3^2)\,d\tau + \frac{1}{2}\,u_2^2 \int \varrho\,(r_3^2 + r_1^2)\,d\tau \\ \quad + \frac{1}{2}\,u_3^2 \int \varrho\,(r_1^2 + r_2^2)\,d\tau - u_1\,u_2 \int \varrho\,r_1\,r_2\,d\tau \\ \quad - u_2\,u_3 \int \varrho\,r_2\,r_3\,d\tau - u_3\,u_1 \int \varrho\,r_3\,r_1\,d\tau\,, \end{cases}$$

wenn u_1, u_2, u_3 die drei Komponenten des Wirbels $\mathfrak{u}$ und r_1, r_2, r_3 die drei Komponenten der Entfernung des Volumenelementes $d\tau$ vom Schwerpunkt bedeuten. Man bezeichnet die ersten drei Integrale als die Trägheitsmomente, die drei letzten als die Deviationsmomente um die drei Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Legen wir die Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ so, daß sie mit den Richtungen des Maximal-Minimal- und Sattelwertes des Vektors $\mathfrak{u}$ zusammenfallen, d. h. mit den Hauptachsen der Fläche zweiten Grades, so verschwinden die Deviationsmomente, die drei übrigbleibenden Integrale sind die drei Hauptträgheitsmomente.

Um die Bewegung eines starren Körpers, der vorgegebenen Kräften unterworfen ist, zu bestimmen, gehen wir von dem d'Alembertschen Prinzip aus. Nach diesem müssen in jedem Augenblick der Bewegung des Punktsystems die gegebenen bewegenden Kräfte, unter Hinzufügung der negativ genommenen, mit den Massen multiplizierten, wahren Beschleunigungen — der sogenannten Trägheitskräfte —, sich das Gleich-

gewicht halten. Den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am starren Körper entsprechend, lauten also die Bedingungen, aus denen die Bewegung abgeleitet werden kann:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum_i \left(\mathfrak{P}_i - m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2}\right) = 0\,, \\ \sum_i \left[\mathfrak{r}_i,\ \mathfrak{P}_i - m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2}\right] = 0\,. \end{cases}$$

Handelt es sich um die Bewegung eines um einen Punkt drehbaren starren Körpers, so ist die erste Bedingung identisch erfüllt, es bleibt nur die zweite zu erfüllen übrig, die wir schreiben:

$$(8)\qquad \mathfrak{K} = \sum_i \left[\mathfrak{r}_i,\ m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2}\right],$$

worin $\mathfrak{K}$ das resultierende Koppelmoment bedeutet. Diese Gleichung läßt sich mit Benutzung der Gleichung (4) in § 29 leicht in die den bekannten Eulerschen Gleichungen analoge Darstellung der Bewegung eines starren Körpers in Vektorenschreibweise überführen.

Wir wählen als festen Drehpunkt den Schwerpunkt des Systems. Aus Gleichung (4) folgt dann durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{r}_i$, da $\mathfrak{v}_0$ verschwindet:

$$\left[\mathfrak{r}_i \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt}\right] = [\mathfrak{r}_i [\mathfrak{u}, \mathfrak{v}_i]] + \left[\mathfrak{r}_i \left[\frac{d\mathfrak{u}}{dt}, \mathfrak{r}_i\right]\right]$$

$$= \mathfrak{u}(\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i) - \mathfrak{v}_i (\mathfrak{r}_i \mathfrak{u}) + \frac{d\mathfrak{u}}{dt} \mathfrak{r}_i^2 - \mathfrak{r}_i \left(\mathfrak{r}_i \frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right)$$

$$= -\mathfrak{v}_i (\mathfrak{r}_i \mathfrak{u}) + \frac{d\mathfrak{u}}{dt} \mathfrak{r}_i^2 - \mathfrak{r}_i \left(\mathfrak{r}_i \frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right).$$

Nach Multiplikation mit m_i und Summation (resp. Integration) über alle i erhalten wir:

$$(2)\qquad \mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{u}}{dt} \int \varrho\, r^2\, d\tau - \int \mathfrak{r}\, \varrho \left(\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right) d\tau - \int [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\, (\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})\, \varrho\, d\tau\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung der Reihe nach mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, den Einheitsvektoren der Hauptträgheitsachsen, bezeichnen die

Komponenten von u in diesen Richtungen mit u_1, u_2, u_3, die von $\mathfrak{r}$ mit r_1, r_2, r_3, die von $\mathfrak{K}$ mit K_1, K_2, K_3 und berücksichtigen, daß unter diesen Annahmen die Deviationsmomente Null sind, so erhalten wir die Eulerschen Gleichungen. Es ist nämlich

$$K_1 = \frac{du_1}{dt}\int \varrho\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)\,d\tau - \int r_1\,\varrho\left(\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right)d\tau$$
$$- \int (u_2 r_3 - u_3 r_2)\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})\,\varrho\,d\tau$$
$$= \frac{du_1}{dt}\int \varrho\,(r_2^2 + r_3^2)\,d\tau + u_2 u_3 \int \varrho\,(r_2^2 - r_3^2)\,d\tau\,.$$

Wenn wir also mit A, B, C die Trägheitsmomente um die drei Achsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnen, so folgt:

$$(10)\qquad \begin{cases} K_1 = A\,\dfrac{du_1}{dt} + u_2 u_3\,(C - B)\,, & \text{entsprechend:} \\ K_2 = B\,\dfrac{du_2}{dt} + u_3 u_1\,(A - C)\,, \\ K_3 = C\,\dfrac{du_3}{dt} + u_1 u_2\,(B - A)\,. \end{cases}$$

§ 31. Mehrfache Anwendung der Differentialoperation ∇.

Es ist schon häufig von der Bemerkung Gebrauch gemacht worden, daß das Zeichen ∇ bei Multiplikationsrechnungen und Transformationen von Ausdrücken ebenso behandelt werden könne, als sei es das Symbol eines Vektors. Mit Hilfe dieser symbolischen Rechnungsweise, als der einfachsten Methode, mögen hier noch einige Formeln entwickelt werden, welche die Anwendung des Hamiltonschen Operators bei Produkten von Skalaren und Vektoren und die mehrfache Anwendung des Operators auf die bekannten Formen zurückführen.

Es sind im folgenden der Reihe nach die verschiedenen dreigliedrigen Differentialkombinationen von Skalaren, Vektoren und dem Operationszeichen aufgeführt. Die Schreibweise ist genügend definiert, so daß eine nähere Besprechung der Formeln nicht nötig erscheint; beigefügte Indizes sollen die Größe bezeichnen, die in dem Differentialausdruck bei der Differentiation konstant zu halten ist.

(1) $\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} + \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\operatorname{grad}\mathfrak{a}.$

(2) $[\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b})] = \operatorname{curl}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\operatorname{curl}\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}\operatorname{grad}\mathfrak{a}].$

(3) $\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} + \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}}.$

(4) $\begin{aligned}\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= \operatorname{div}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_{\mathfrak{a}} + \nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]_{\mathfrak{b}} \\ &= -\mathfrak{a}\operatorname{curl}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\operatorname{curl}\mathfrak{a}.\end{aligned}$

(5) $\begin{aligned}[\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] &= \operatorname{curl}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]]_{\mathfrak{a}} + [\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]]_{\mathfrak{b}} \\ &= [\mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a})]_{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a})]_{\mathfrak{b}} \\ &= \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a}.\end{aligned}$

6) $[\mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}]] = \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\nabla)_{\mathfrak{a}} = \operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} - (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}.$

Die Vereinfachung der Rechnung durch die symbolische Schreibweise ist sehr groß, besonders bei etwas komplizierterem Bau, wie z. B. bei Gleichung (5). Um diese Gleichung auf gewöhnlichem analytischen Wege zu verifizieren, geht man am besten von der Schreibweise aus:

$$\operatorname{curl}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

und berechnet die x-Komponente der rechten Seite von

Gleichung (5); dieselbe läßt sich nach einigen Kürzungen auf die Form:

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_1 b_2 - a_2 b_1) - \frac{\partial}{\partial z}(a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

bringen; Entsprechendes gilt von der y- und x-Komponente.

Ist in den Formeln (1)—(5) der Vektor $\mathfrak{b}$ durch das Zeichen ∇ ersetzt, so kommt:

$$(1') \quad \nabla\nabla a = \operatorname{div}\operatorname{grad} a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \nabla^2 a = \Delta a \text{ [1]},$$

$$(2') \quad [\nabla\nabla a] = \operatorname{curl}\operatorname{grad} a = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3') \quad \nabla(\nabla\mathfrak{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\nabla^2 a_1 + \mathfrak{j}\nabla^2 a_2 + \mathfrak{k}\nabla^2 a_3,$$

$$(4') \quad \nabla[\nabla\mathfrak{a}] = \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{a} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5') \quad [\nabla[\nabla\mathfrak{a}]] = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{a} = \nabla(\nabla\mathfrak{a}) - (\nabla\nabla)\mathfrak{a}$$
$$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{a} - \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}\mathfrak{i} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2}\mathfrak{j} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2}\mathfrak{k}\right).$$

[1]) Die Schreibweise rührt von Lamé her.

Im Anschluß an Gleichung (4′) mag noch hervorgehoben werden, daß, wenn div $\mathfrak{c}$ im betrachteten Raum Null ist, $\mathfrak{c}$ sich als Rotation eines anderen Vektors darstellen lassen muß.

II. Teil.

Anwendungen in einigen physikalischen Gebieten.

§ 32. Einteilung.

Wir haben zweierlei Vektoren kennen gelernt, axiale und polare (§ 3) oder, wenn dieselben als Funktionen des Ortes gegeben sind, also Vektorfelder bestimmen, solche, deren Divergenz Null, und solche, deren Rotation Null ist. Im ersten Fall haben wir es mit einem quellenfreien, im zweiten mit einem wirbelfreien Gebiet zu tun; in jenem können wir den Vektor durch die Rotation eines anderen Vektors darstellen, in diesem durch den Gradienten einer skalaren Größe. Je nachdem das eine oder andere der Fall ist, spricht man von einem Solenoidal- oder einem Potential-Vektor.

Den allgemeinsten Fall eines Vektorfeldes bestimmt die Summe eines Solenoidal- und eines Potentialvektors, entsprechend der Darstellung des allgemeinsten Vektors durch die Summe eines axialen und eines polaren Vektors.

Es kommen also die folgenden Fälle von Vektorfeldern vor. Es ist im ganzen Raum

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{a} = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathfrak{a} = 0\,,$$

dann ist nach § 21: $\mathfrak{a} = \operatorname{grad} V$, also

$$\text{(1′)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} = \nabla^2 V = 0\,.$$

Eine partikuläre Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$V = \frac{m}{r} + n ,$$

worin m und n willkürliche Konstanten bedeuten. Soll nun Gleichung (1′) im ganzen Raum, also auch für $r = 0$, gelten, so muß die willkürliche Konstante $m = 0$ sein, so daß sich V auf eine Konstante reduziert und daher

$$\mathfrak{a} = 0$$

sein muß.

(2) $$\operatorname{curl}\mathfrak{a} = 0 , \quad \operatorname{div}\mathfrak{a} \neq 0 ,$$

so haben wir ein wirbelfreies Quellengebiet mit dem Potentialvektor $\mathfrak{a}$;

(3) $$\operatorname{curl}\mathfrak{a} \neq 0 , \quad \operatorname{div}\mathfrak{a} = 0 ,$$

so haben wir ein quellenfreies Wirbelgebiet mit dem solenoidalen Vektor $\mathfrak{a}$.

(4) $$\operatorname{curl}\mathfrak{a} \neq 0 , \quad \operatorname{div}\mathfrak{a} \neq 0 ,$$

so können wir die folgende Zerlegung vornehmen. Es sei

$$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \varrho ,$$
$$\operatorname{curl}\mathfrak{a} = \mathfrak{r} ,$$

dann setzen wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 ,$$

wo $\mathfrak{a}_1$ einen Potentialvektor, $\mathfrak{a}_2$ einen solenoidalen Vektor bedeuten soll, dann folgt:

$$\operatorname{div}\mathfrak{a}_1 = \varrho , \quad \operatorname{curl}\mathfrak{a}_1 = 0$$
$$\operatorname{div}\mathfrak{a}_2 = 0 , \quad \operatorname{curl}\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{r} .$$

In der Potentialtheorie hat man es vorzugsweise mit dem Potentialvektor zu tun, in der Hydrodynamik vorzugs-

weise mit dem solenoidalen Vektor, während man sich zur Darstellung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen des aus beiden zusammengesetzten Vektors bedient.

Ich werde dementsprechend in den nun folgenden drei Kapiteln über Anwendungen der Vektoranalysis auf die theoretische Physik zunächst einige allgemeine Lehrsätze der Potentialtheorie und damit des Potentialvektors, dann solche der Hydrodynamik und des solenoidalen Vektors ableiten und zum Schluß auf die Darstellung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen durch die Verbindung beider kurz eingehen.

Kapitel 1.

Einige Sätze aus der Potentialtheorie.

§ 33. Die Bedeutung des Potentials in der Mechanik.

Die skalare Größe V, als deren Gradient der Vektor $\mathfrak{a}$ dargestellt werden kann, wenn $\operatorname{curl}\mathfrak{a} = 0$ ist, nennt man das skalare Potential des Potentialvektors.

Aus § 21 geht hervor: Die Komponente des Potentialvektors in der Richtung $\mathfrak{s}$ mit den Komponenten s_1, s_2, s_3 erhalten wir durch Differentiation des Potentials nach dieser Richtung.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Kraftvektor und von einem Potential V ableitbar, so ist die Arbeit, die bei Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluß dieser Kraft längs eines geschlossenen Weges geleistet wird, Null; denn nach § 21 ist

$$\int_1^2 \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = V_2 - V_1$$

nur von den Endpunkten des Weges abhängig.

Besitzt die auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft ein Potential, so kennen wir stets ein Integral der Bewegungsdifferentialgleichungen, nämlich das der lebendigen Kraft. Denn durch skalare Multiplikation der Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{a} = \nabla V \tag{1}$$

mit $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ folgt, wie am Ende von § 19,

$$m\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt} = \mathfrak{a}\frac{dr}{dt}\mathfrak{r} = \frac{1}{dt}(d\mathfrak{r}\nabla)V = \frac{dV}{dt},$$

wobei unter dem Differential dV die Änderung von V in Richtung des Weges $d\mathfrak{r}$ bei der Bewegung während des Zeitelementes dt zu verstehen ist. Durch Integration folgt:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - V = \text{const.}$$

Kräfte, die ein Potential besitzen, nennt man konservative Kräfte; das Potential bezeichnet man in diesem Fall auch als Kraftfunktion. Zentralkräfte sind konservativ.

Der Ausdruck der Kraft, die dem Newtonschen Anziehungsgesetz zufolge zwischen den Massenpunkten m_1 und m_2 wirkt, ist

$$\mathfrak{a} = -\frac{Km_1m_2}{r^2}\mathfrak{r}. \tag{2}$$

Das Potential dieser Kraft lautet:

$$V = \frac{Km_1m_2}{r}. \tag{3}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß in diesem Fall unter Ausschluß des Wertes $r = 0$

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} = \nabla\nabla V = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = 0$$

ist, eine Differentialgleichung, welche unter dem Namen „Laplacesche Gleichung“ bekannt ist.

§ 34. Newtonsches Potential.

Unter Potential schlechthin versteht man häufig die Kräftefunktion des Newtonschen Anziehungsgesetzes bei einer kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Massenverteilung. Dieses Potential ist eine Funktion, die bei einer solchen Massenverteilung in dem dreidimensionalen, unendlich ausgedehnten Raum die folgenden Bedingungen erfüllt.

An jedem Punkt des Raumes mit Ausnahme gewisser, nicht räumlich ausgedehnter Stellen (z. B. Punkte, Linien, Flächen) ist

$$\text{(1)} \qquad \nabla^2 V = \operatorname{div}\mathfrak{a} = 4\pi\varrho\,,$$

wo $\varrho(\mathfrak{r})$ die Dichte oder Ergiebigkeit des Massensystems im Punkte $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} = r\mathfrak{r}$ bedeutet.

V und seine ersten Ableitungen nach $\mathfrak{r}$ sind überall stetige Funktionen wieder mit Ausnahme gewisser, nicht räumlich ausgedehnter Stellen.

Die Produkte $\mathfrak{r}V$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\nabla)V$ behalten überall endliche Werte.

An Punkten und Linien dürfen Unstetigkeiten von V und seinen ersten Ableitungen vorhanden sein, ohne näher angegeben zu werden.

Besitzen an Flächen V und die ersten Ableitungen Unstetigkeiten, so sollen sich dieselben beschränken auf Unstetigkeiten von V und auf solche der ersten Ableitungen in Richtung der Normale $\mathfrak{n}$ zur Fläche beim

Durchschreiten dieser Fläche; die Sprünge sollen durch die vorgegebenen Funktionen ω, χ gegeben sein, und zwar:

$$(2) \qquad ((\bar{n}\nabla)V)_1 + ((\bar{n}\nabla)V)_2 = 4\pi\omega ,$$

$$(3) \qquad V_1 - V_2 = 4\pi\chi ,$$

wobei die Indizes zur Unterscheidung der Werte an den beiden Seiten der Fläche beigefügt sind und die Normalen beiderseits nach außen gerichtet sind.

Diese Bedingungen bestimmen eindeutig das Potential, die denselben genügende Funktion V lautet:

$$(4) \qquad -V = \int \frac{\varrho \cdot d\tau}{r} + \int \frac{\omega}{r} df - \int \left(\chi (\bar{n}\nabla)\frac{1}{r}\right) df .$$

§ 35. Hilfssätze von Green.

Nach dem Satz von Gauß:

$$(1) \qquad \int \operatorname{div} \mathfrak{a}\, d\tau = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{o}$$

ergibt sich, wenn wir statt $\mathfrak{a}$ das Produkt aus einem Vektor in eine skalare Größe einsetzen (wobei die Endlichkeit und Stetigkeit des Vektors und des Skalars in dem betrachteten Raum vorausgesetzt wird):

$$(2) \qquad \int \operatorname{div}(\mathfrak{a} \cdot V)\, d\tau = \int (\mathfrak{a} V) \cdot d\mathfrak{o} .$$

Nun ist

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a} \cdot V) = V \operatorname{div} \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \operatorname{grad} V ;$$

setzen wir daher für $\mathfrak{a} = \operatorname{grad} U$, so kommt:

$$(3) \qquad \int (V \nabla U)\, d\mathfrak{o} = \int (V \nabla^2 U)\, d\tau + \int (\nabla U \nabla V)\, d\tau .$$

Durch Vertauschung von U und V erhält man eine entsprechende Gleichung. Subtrahieren wir diese beiden voneinander, so kommt:

$$(4) \qquad \int (V \nabla U - U \nabla V)\, d\mathfrak{o} = \int (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V)\, d\tau .$$

Ist $V = U$, so entsteht aus Gleichung (3):

$$\int (V \nabla V)\, d\sigma = \int \left(V \nabla^2 V + (\nabla V)^2 \right) d\tau . \tag{5}$$

Genügt endlich V der Laplaceschen Gleichung: $\nabla^2 V = 0$, so ist

$$\int V \nabla V\, d\sigma = \int (\nabla V)^2\, d\tau . \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) bis (6) sind zuerst von Green abgeleitet worden. Das Integral der Laplaceschen Gleichung

$$V = \frac{c_1}{r} + c_2 ,$$

wo c_1, c_2 willkürliche Integrationskonstanten sind, hat im Punkt $r = 0$ einen unendlich großen Wert; sollen daher die Greenschen Sätze (4) bis (6) auf diese Funktion angewandt werden, so müssen wir von dem betreffenden Raum den Punkt $r = 0$ ausschließen und das Oberflächenintegral über diese ausschließende Fläche ausdehnen. Wir umschließen den Punkt durch eine Kugelfläche von sehr kleinem Radius. Das Flächenintegral über diese kleine Kugelfläche läßt sich sofort ausrechnen. Es ist, wenn der Einfachheit wegen $V = \frac{1}{r}$ gesetzt wird,

$$\int V \nabla U\, d\sigma = \int \frac{1}{r} \nabla U\, d\sigma ;$$

es bezeichne $\bar{n}$ die Richtung des Oberflächenelementes $d\sigma$, und $(\nabla U \cdot \bar{n})_{max}$ den größten Wert, den die eingeklammerte Größe auf der bei der Integration zu berücksichtigenden Oberfläche annehmen kann, so ist

$$\left| \int \frac{1}{r} \nabla U \cdot d\sigma \right| \leqq \left| (\nabla U \cdot \bar{n})_{max} \int \frac{d\sigma}{r} \right| = 0 .$$

Ferner ist, wenn der Kugelradius so klein ist, daß die Werte von U an den verschiedenen Stellen unendlich wenig von dem Mittelwert U_0 im Punkt $r = 0$ verschieden sind,

$$(7) \quad \int U \nabla V \cdot d\upsilon = \int U \nabla \frac{1}{r} \cdot d\upsilon = -U_0 \int \frac{d\upsilon}{r^2} = -4\pi U_0 .$$

Dagegen ist das Volumenintegral über die kleine Kugel Null, wenn $\nabla^2 U$ endlich ist; es bleibt also das Volumenintegral in Gleichung (4) von dieser Absonderung unbeeinflußt. Gleichung (4) geht dadurch über in:

$$(8) \quad \int \left(\frac{1}{r} \nabla U - U \nabla \frac{1}{r} \right) d\upsilon - 4\pi U_0 = \int \frac{1}{r} \nabla^2 U d\tau \ ^1),$$

in welcher Formel die Integrale über den Raum, resp. über die Oberfläche des Raumes zu erstrecken sind, in welchem U und die erste Ableitung von U stetige Funktionen sind.

§ 36. Ableitung der Potentialfunktion aus den charakteristischen Bedingungen.

Die Gleichung (8) des § 35 stellt eine Funktionalgleichung zwischen einer Funktion U und ihren ersten und zweiten Ableitungen dar, die von jeder Funktion erfüllt werden muß, welche samt ihrer ersten Ableitung in

---

[1]) Die Richtigkeit des negativen Zeichens vor $4\pi U_0$ erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daß wir die Normalenrichtung der Oberflächenelemente der sehr kleinen Kugel, deren Inneres zum „äußeren Raum“ gehört — wenn man als solchen den Raum bezeichnet, der von der Betrachtung ausgeschlossen ist —, konsequenterweise nach dem Innern der Kugel weisen lassen müssen, wenn die Normale der Oberflächenelemente der anderen Integrale nach dem „äußeren Raum“ gerichtet ist.

dem für die Funktionsgleichung in Betracht gezogenen Bereich endlich ist. Es muß also auch die Potentialfunktion V dieser Gleichung genügen, wenn wir die etwa vorhandenen Unstetigkeitspunkte durch Kugelflächen mit beliebig kleinem Radius von dem betrachteten Raum ausschließen, Linien durch röhrenförmige Flächen möglichst geringer Ausdehnung und Unstetigkeitsflächen durch geschlossene Flächen, die sich ihnen möglichst nahe beiderseits anlegen. Das links stehende Oberflächenintegral ist dann auszudehnen: 1. über die unendlich große Kugelfläche, die den ganzen Raum umschließt, 2. über die Umschließungsflächen um Unstetigkeitspunkte und -linien, 3. über die Umschließungsflächen der Unstetigkeitsflächen mit den vorgegebenen Sprüngen.

Nun ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen in § 34:

$$\text{ad (1)} \int_{\infty} \frac{1}{r} \nabla V \cdot d\sigma = \int_{\infty} r(\mathfrak{r} \nabla V) \frac{d\sigma_1}{r} \leqq (r\,\mathfrak{r} \nabla V)^{r=\infty}_{\max} \cdot \int_{\infty} \frac{d\sigma_1}{r} = 0 ,$$

worin $d\sigma_1$ den absoluten Betrag des Oberflächenelementes $d\sigma_1$ der Einheitskugel bezeichnet, welches vom Mittelpunkt unter dem gleichen Winkel wie $d\sigma$ gesehen wird; ferner:

$$-\int_{\infty} V \nabla \frac{1}{r} d\sigma = \int_{\infty} V \frac{1}{r^2} r^2 \, d\sigma_1 \leqq (rV)^{r=\infty}_{\max} \cdot \int_{\infty} \frac{d\sigma_1}{r} = 0 .$$

$$\text{ad (2)} \qquad \int \left(\frac{1}{r} \nabla V - V \nabla \frac{1}{r} \right) d\sigma = 0 ,$$

wegen der Endlichkeit von V, r und deren Ableitungen an der Oberfläche und zufolge der gegen Null konvergierenden Größe der Oberfläche.

ad (3) $$\int\left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla\frac{1}{r}\right)d\sigma = \int\frac{1}{r}\{((\bar{n}\nabla)V)_1 + ((\bar{n}\nabla)V)_2\}\,df - \int(V_1 - V_2)(\bar{n}\nabla)\frac{1}{r}\cdot df,$$

indem wir nämlich immer die auf den beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche sich gegenüberliegenden Oberflächenelemente zusammennehmen und nur über die eine Seite, oder was dasselbe ist, über die Unstetigkeitsfläche mit den Flächenelementen df integrieren. Mit Bezugnahme auf die obigen Bestimmungen über die Flächenunstetigkeiten können wir den Ausdruck schreiben:

$$4\pi\int\frac{\omega}{r}\,df - 4\pi\int\chi(\bar{n}\nabla)\frac{1}{r}\,df.$$

Durch Addition der Flächenintegrale[1]) und mit Berücksichtigung des Wertes $4\pi\varrho$ für $\nabla^2 V$ in dem Integrationsraum selbst erhalten wir daher aus Gleichung (8) die folgende Form:

$$(1) \qquad -V_0 = \int\frac{\varrho}{r}\,d\tau + \int\frac{\omega}{r}\,df - \int\chi(\bar{n}\nabla)\frac{1}{r}\,df.$$

V_0 ist der Wert der Potentialfunktion V an der Stelle des Raumes, von welcher aus die Entfernung r des Raumelementes $d\tau$ oder des Flächenelementes df zu rechnen ist. Da die Größen ϱ, ω, χ als Funktionen von x, y, z resp. $\mathfrak{x}$ gegeben sind, welches die Integrationsvariablen darstellen, ist V_0 hieraus berechenbar.

Die Funktion V_0 erfüllt alle Bedingungen, die in § 34 gestellt worden sind; es ist nur noch ein Wort über die Eindeutigkeit derselben hinzuzufügen. Sind V_0 und V_0'

[1]) Vgl. die Anmerkung auf Seite 95.

zwei Funktionen, die den gestellten Bedingungen genügen, so gelten für die Differenz $U = V_0 - V_0'$ die Bedingungen:

1. $\nabla^2 U = 0$ (mit Ausnahme gewisser, nicht räumlich ausgedehnter Stellen: Punkte, Linien, Flächen).

2. U und seine ersten Ableitungen nach $\mathfrak{r}$ sind überall endlich und stetig, mit Ausnahme nicht räumlich ausgedehnter Stellen, nämlich von Punkten und Linien; Unstetigkeitsflächen von U gibt es nicht.

3. Die Produkte $\mathfrak{r}U$ und $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\nabla)U$ behalten überall endliche Werte.

Wenden wir nach Ausschluß der Unstetigkeiten durch Kugel- und Röhrenflächen auf diese Funktion die Greensche Gleichung (6) an, so verschwindet, wie sich analog dem Obigen zeigen läßt, die linke Seite identisch; dies fordert: $(\nabla U)^2 = 0$, und hieraus folgt mit Benutzung von Bedingung 3, daß U selbst Null sein muß. Somit ist die Eindeutigkeit der Potentialfunktion erwiesen.

§ 37. Deutung des ersten Gliedes der Lösung.

Es soll gezeigt werden, daß die gewonnene Lösung die Kräftefunktion des Newtonschen Anziehungsgesetzes bei einer kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Massenverteilung darstellt, d. h. daß die partielle Ableitung nach irgend einer Richtung im Raum eine in dieser Richtung wirkende Kraft darstellt, die als Ausdruck des Newtonschen Gesetzes aufgefaßt werden kann.

Nach Gleichung (3) von § 33 ist:

$$(1) \qquad V = \frac{m_1 m_2}{r} K$$

das Newtonsche Potential in bezug auf die Wirkung zweier Massenpunkte m_1 und m_2. Ist ein Massensystem

$m_0\, m_1 \ldots m_i \ldots m_n$ gegeben, dessen Massenpunkte nach dem Newtonschen Gesetz aufeinander wirken, so ist — falls $r_1 \ldots r_n$ die Entfernung zwischen den Massenpunkten $m_1 \ldots m_n$ und m_0 bedeutet — der Punkt mit der Masse m_0 der Kraft unterworfen:

$$\mathfrak{a}_0 = -K m_0 \sum_i \frac{m_i \bar{\mathfrak{r}}_i}{r_i^2}$$

mit dem Potential:

$$V = K m_0 \sum_i \frac{m_i}{r_i}.$$

Beim Übergang von einem diskontinuierlichen zu einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Massensystem verwandeln sich die Summen in dreifache Integrale, die über den ganzen, von den anziehenden Massenteilchen erfüllten Raum zu erstrecken sind. Der Einfachheit halber setzen wir $K = 1$ und $m_0 = 1$. Dann ist

$$\mathfrak{a}_0 = -\iiint \frac{\varrho \cdot \bar{\mathfrak{r}}}{r^2}\, d\tau \tag{2}$$

mit dem Potential:

$$V_0 = \iiint \frac{\varrho}{r}\, d\tau\,, \tag{3}$$

wenn ϱ die Massendichte in dem Volumenelement $d\tau$ bedeutet, das von dem Punkt, auf den sich Kraft und Potential beziehen, um $\mathfrak{r}$ entfernt ist. Man hat für das Potential die symbolische Bezeichnung eingeführt:

$$V_0 = \mathrm{Pot}\,\varrho\,; \tag{4}$$

$$\mathfrak{a}_0 = \nabla V_0 = \nabla\,\mathrm{Pot}\,\varrho = \mathrm{New}\,\varrho\,,$$

herrührend von dem Namen Newton, da Newϱ die Attraktionskraft eines Körpers mit der Dichte ϱ auf einen

Punkt bedeutet. Pot ϱ ist eine Funktion des Punktes (0), während ϱ eine gegebene Funktion des Raumes, über den integriert wird, bedeutet.

Die Betrachtung kann sich zunächst nur auf einen Punkt beziehen, der außerhalb des mit Masse erfüllten Raumes liegt, da $\mathfrak{a}$ für den Punkt $r = 0$ seine Endlichkeit und Stetigkeit einbüßen könnte. Wir müssen also, wenn wir das Potential und die Kraft in bezug auf einen Punkt, der in der anziehenden Masse liegt, berechnen wollen, zunächst denselben durch eine kleine Kugel von dem Integrationsraum ausschließen und den Einfluß dieser kleinen Kugel auf das Potential und die Kraft in dem Mittelpunkt der Kugel getrennt ausrechnen. Es ist aber leicht zu zeigen, daß, wenn ϱ endlich bleibt, die Integrale über die unendlich kleine Kugel:

$$\iiint \frac{\varrho \cdot \mathfrak{r}}{r^3} d\tau$$

und

$$\iiint \frac{\varrho}{r} d\tau$$

einen unendlich kleinen Wert annehmen, so daß wir ohne Rücksicht auf diese Unstetigkeit über das ganze Gebiet integrieren dürfen.

$\int \frac{\varrho}{r} d\tau$ ist nun das erste Glied der Lösung (1) in § 36, dasselbe stellt also das Newtonsche Potential einer kontinuierlich im Raume verteilten Masse in bezug auf irgend einen Punkt, der vom Element $d\tau$ um $\mathfrak{r}$ entfernt ist, dar. ϱ bedeutet die Dichte der im Raum kontinuierlich verteilten Masse, oder infolge von:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 V = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{a}$$

die Ergiebigkeit des Vektors $\mathfrak{a}$ an dem Punkt x, y, z. Ist $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ oder ϱ positiv, so ist der Punkt ein Quellpunkt, ist ϱ negativ, ein Senkpunkt.

§ 38. Deutung des zweiten Gliedes der Lösung.

Den zweiten Term der Lösung, das Integral $\int \frac{\omega}{r} df$, können wir ebenfalls als den Ausdruck des Newtonschen Potentials eines gewissen materiellen Systems betrachten. Das Integral bezieht sich auf die Umschließung der Unstetigkeitsfläche, also auf eine geschlossene Fläche, die sich an die Unstetigkeitsfläche von beiden Seiten möglichst eng anschließen soll. Es sei ε die unendlich kleine Entfernung zweier sich gegenüberliegender Flächenelemente der Umschließungsfläche, so daß $\varepsilon\, df$ das Volumen eines kleinen Zylinders ist, dessen Basisflächen Flächenelemente der Umschließungsfläche sind, welche im Grenzfall mit dem Element df der Unstetigkeitsfläche zusammenfallen. Das Newtonsche Potential des von der Umschließungsfläche eingeschlossenen Raumes auf einen äußeren Punkt würde, wenn die Massendichte in diesem Raume ϱ' ist, lauten:

$$\int \frac{\varrho'\, \varepsilon\, df}{r},$$

ein Integral, welches über die Unstetigkeitsfläche auszudehnen wäre. $\varepsilon\varrho'$ stellt die Masse des Zylinders von der Höhe ε über der Flächeneinheit dar; konvergiert ε gegen Null, d. h. rücken die Basisflächen einander immer näher, und soll trotzdem die Masse des Zylinders einem endlichen Grenzwert ω sich nähern, so muß die Dichte größer und größer werden. Im Grenzfall: $\varepsilon = 0$ ent-

steht eine Fläche von unendlich großer, räumlicher Massendichte, derart, daß die Masse der Flächeneinheit den endlichen Wert ω annimmt. $\int \frac{\omega}{r} df$ ist also das Newtonsche Potential einer mit Masse belegten Fläche. Auch hier spricht man von Ergiebigkeit der Quell- und Senkpunkte, die über die Fläche verteilt sind. Es ist

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{a} \cdot \varepsilon \cdot df = \int \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{o} ,$$

wo das linke Integral über die Unstetigkeitsfläche auszudehnen ist, das rechte über die Umschließungsfläche. Die letztere können wir auffassen als die Fläche eines Zylinders von unendlich kleiner Höhe, deren Basisflächen, die wir wieder durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden wollen, parallel sind. Dann ist die Summe zweier Integralelemente, die sich auf die beiden Elementarbasisflächen eines Elementarzylinders beziehen:

$$(\mathfrak{a}\, d\mathfrak{o})_1 + (\mathfrak{a}\, d\mathfrak{o})_2 = \{((\bar{\mathfrak{n}} V) V)_1 + ((\bar{\mathfrak{n}} V) V)_2\}\, df = 4\pi\omega\, df .$$

Es ist also

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{a} \cdot \varepsilon = \omega ,$$

die Ergiebigkeit in dem unendlich kleinen, von der Umschließungsfläche eingeschlossenen Raume. Für verschwindendes ε bleibt $\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{a} \cdot \varepsilon$ noch endlich, es reduziert sich die räumliche Ergiebigkeit auf eine Flächenergiebigkeit oder Flächendivergenz.

Wir haben uns also an der Unstetigkeitsfläche eine Massenverteilung, eine sogenannte Flächenbelegung vorzustellen, deren Wirkung auf die äußeren Punkte gemäß dem Newtonschen Gesetz erfolgt.

§ 39. Deutung des dritten Gliedes der Lösung.

Endlich läßt sich auch der dritte Ausdruck der Lösung in eine den ersten beiden analoge Form bringen. Wir schreiben:

$$\int' \chi\,(\bar{n}\nabla)\frac{1}{r}\,df = \int \chi\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,df$$

$$= \int \chi \frac{1}{dn}\,\frac{1}{r+dr}\,df - \int \chi \frac{1}{dn}\,\frac{1}{r}\,df.$$

Setzen wir nun:

$$\chi\frac{1}{dn} = \varphi$$

mit der Bedingung, daß $\varphi \cdot dn$ für kleiner werdendes dn einen endlichen Wert annimmt, so sind die beiden Integrale von der in § 38 erörterten Form. φ oder $\chi\frac{1}{dn}$ stellt eine Flächenergiebigkeit an der Unstetigkeitsfläche dar, welche dem Newtonschen Gesetze gemäß auf die äußeren Punkte wirkt. Die Flächenergiebigkeiten, auf die sich die zwei Integrale beziehen, sind zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche verteilt, so daß das erste Integral über eine dem angezogenen Punkt abgewandte, der Unstetigkeitsfläche sich eng anschließende Fläche, das andere über eine der Unstetigkeitsfläche von der anderen Seite sich eng anschließende Fläche zu nehmen ist. Die Ergiebigkeiten sind auf gegenüberliegenden, um dn voneinander entfernten Flächenelementen einander entgegengesetzt gleich und wachsen bei abnehmendem dn ins Unendliche, so daß

$$\mathrm{Lim}\,\varphi \cdot dn$$

dem vorgegebenen Werte χ an der Stelle sich nähert. Infolgedessen nimmt die Differenz der beiden Integrale einen endlichen Wert an. Denn

$$\int \chi \frac{1}{dn}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+dr}\right) df = \int \varphi \cdot \frac{dr}{r^2}\, df = \int \chi \cos(\mathfrak{r}, \mathfrak{n}) \frac{df}{r^2}\,.$$

Wir können statt dessen sagen:

$$\int \chi (\bar{\mathfrak{n}} V) \frac{1}{r}\, df \equiv \int (\chi \bar{\mathfrak{n}}) V \frac{1}{r}\, df$$

stellt die Summe zweier entgegengesetzt gleicher, unendlich nahe benachbarter, zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche verteilter Flächenbelegungen dar, die von der Art unendlich große Ergiebigkeit besitzen, daß das Produkt der Ergiebigkeit in die Entfernung der beiden Belegungen mit abnehmender Entfernung dem endlichen Wert

$$\chi = \frac{1}{4\pi}(V_1 - V_2)$$

sich nähert. Man nennt solche Unstetigkeiten Doppelbelegungen oder Doppelquellen, das Produkt $(\chi \bar{\mathfrak{n}})$ bezeichnet man als Moment der Doppelquelle, der absolute Betrag dieses Momentes ist also gleich dem 4π-fachen des Sprunges von V an der Unstetigkeitsfläche.

Ist $\chi = \varphi\, dn$ konstant über die ganze Unstetigkeitsfläche, so läßt sich das Potential einer solchen mit Doppelquellen belegten Fläche kürzer so schreiben:

$$\chi \int \frac{\cos(\mathfrak{r}, \mathfrak{n})}{r^2}\, df = \chi\, \Omega\,,$$

wo Ω den körperlichen Winkel bezeichnet, unter dem die Fläche vom Bezugspunkt aus erscheint.

Kapitel 2.

Einige Sätze der Hydrodynamik.

§ 40. Einführung der Flächenkräfte.

Wird der Betrachtung der Systembewegungen nicht mehr die Vorstellung zugrunde gelegt, als bestehe das System aus einer Anzahl diskreter Massenpunkte, sondern, wie man es bei der Behandlung der Flüssigkeiten zu tun pflegt, die Vorstellung eines kontinuierlich im Raume verteilten Mediums, so ist es für die Darstellung vorteilhaft, neben den auf die Massenpunkte oder die mit Masse erfüllten Volumenelemente wirkenden Kräften Flächenkräfte einzuführen, die auf die Flächenelemente an der Oberfläche des Körpers wirken sollen. Diese Oberflächenkräfte setzen wir proportional dem absoluten Betrage, do, des Oberflächenelementes $d\sigma$, dessen nach dem Außenraum weisende Normale in die Richtung $\bar{n}$ fallen möge; im allgemeinen werden sie von den Ortskoordinaten und der Richtung des Flächenelementes abhängen, es sei deshalb durch den Index n angegeben, daß die Kraft $\mathfrak{P}_n$ sich auf ein Flächenelement mit der Normale $\bar{n}$ bezieht.

Die Bewegungsgleichungen (7) des § 30 gehen durch diese Festsetzung über in

$$\int\left(\varrho\,\mathfrak{P}\,d\tau + \mathfrak{P}_n\,do - \varrho\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\,d\tau\right) = 0\,, \tag{1}$$

$$\int\left[\mathfrak{r}, \varrho\,\mathfrak{P}\,d\tau + \mathfrak{P}_n\,do - \varrho\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\,d\tau\right] = 0\,, \tag{2}$$

wenn $\mathfrak{P}$ die Kraft der Masseneinheit und ϱ die Dichte bezeichnet.

Da diese Gleichungen für jeden Teil des Mediums,

also auch für ein Volumenelement gelten müssen, so folgt aus der ersten, daß

$$\int \mathfrak{P}_n \, do$$

über die Oberfläche eines unendlich kleinen Volumenelementes ausgedehnt unendlich klein von dritter Ordnung sein muß. Berechnen wir das Integral für den speziellen Fall, daß das Volumenelement ein unendlich kleiner Tetraeder mit den Flächen do, $\mathfrak{i}\,do$, $\mathfrak{j}\,do$, $\mathfrak{k}\,do$ ist, so erkennen wir, daß aus diesem Grunde

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_x(\mathfrak{i}\,d\bar{o}) + \mathfrak{P}_y(\mathfrak{j}\,d\bar{o}) + \mathfrak{P}_z(\mathfrak{k}\,d\bar{o})$$

sein muß. Für irgend einen Teil des Mediums oder das ganze Medium können wir daher schreiben:

$$\int \mathfrak{P}_n \, do = \int \mathfrak{P}_x(\mathfrak{i}\,do) + \mathfrak{P}_y(\mathfrak{j}\,do) + \mathfrak{P}_z(\mathfrak{k}\,do) \, .$$

Die rechte Seite können wir mit Hilfe des Satzes von Gauß in das Raumintegral umformen:

$$\int \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} \right) d\tau \, .$$

Denn es ist

$$\int \mathfrak{P}_x(\mathfrak{i}\,do) = \mathfrak{i}\int(\mathfrak{i}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do) + \mathfrak{j}\int(\mathfrak{j}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do) + \mathfrak{k}\int(\mathfrak{k}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do)$$

oder, da

$$\int(\mathfrak{i}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do) = \int \mathfrak{i}\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{P}_x)\,do = \int \operatorname{div}(\mathfrak{i}\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{P}_x))\,d\tau = \left(\mathfrak{i}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\right) d\tau$$

und entsprechend

$$\int(\mathfrak{j}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do) = \left(\mathfrak{j}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\,d\tau\right)$$

$$\int(\mathfrak{k}\,\mathfrak{P}_x)\,(\mathfrak{i}\,do) = \left(\mathfrak{k}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\,d\tau\right)$$

ist, folgt:

$$\int \mathfrak{P}_x (\mathfrak{i}\, do) = \mathfrak{i}\left(\mathfrak{i}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} d\tau\right) + \mathfrak{j}\left(\mathfrak{j}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} d\tau\right) + \mathfrak{k}\left(\mathfrak{k}\int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} d\tau\right)$$
$$= \int \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} d\tau ,$$

wie leicht verifiziert werden kann [vgl. § 56, Gleichung (5)].

Durch diese Transformation geht die linke Seite der Gleichung (1) in ein Raumintegral über, und es muß infolgedessen sein:

$$(3) \qquad \varrho \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \varrho \mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} .$$

In Gleichung (2) können wir das Oberflächenintegral einer ebensolchen Transformation unterziehen. Es ist

$$\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_n]\, do = \int \left([\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_x](\mathfrak{i}\, do) + [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_y](\mathfrak{j}\, do) + [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_z](\mathfrak{k}\, do)\right)$$
$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_x] + \frac{\partial}{\partial y}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_y] + \frac{\partial}{\partial z}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_z]\right) d\tau$$
$$= \int \left(\left[\mathfrak{r}, \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\right] + [\mathfrak{i}, \mathfrak{P}_x] + \ldots\right) d\tau .$$

Es folgt daher durch Substitution aus (2):

$$\left[\mathfrak{r}, \varrho \mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} - \varrho \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}\right] =$$
$$= -[\mathfrak{i}\, \mathfrak{P}_x] - [\mathfrak{j}\, \mathfrak{P}_y] - [\mathfrak{k}\, \mathfrak{P}_z] .$$

Nach Gleichung (3) verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, also folgt, daß die Komponenten des rechtsstehenden Vektors Null sein müssen, d. h.

$$(4) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{P}_x \mathfrak{j}) = (\mathfrak{P}_y \mathfrak{i}) , \\ (\mathfrak{P}_y \mathfrak{k}) = (\mathfrak{P}_z \mathfrak{j}) , \\ (\mathfrak{P}_z \mathfrak{i}) = (\mathfrak{P}_x \mathfrak{k}) . \end{cases}$$

§ 41. Eulersche Gleichungen für reibungslose Flüssigkeiten.

Bei der Betrachtung reibungsloser Flüssigkeiten nimmt man an, daß

$$(1) \qquad (\mathfrak{P}_x \mathfrak{i}) = (\mathfrak{P}_y \mathfrak{k}) = (\mathfrak{P}_z \mathfrak{i}) = 0$$

und die absoluten Beträge der Druckkräfte $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ gleich sind. Dann kann man schreiben:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = p\,\mathfrak{i}\,, \\ \mathfrak{P}_y = p\,\mathfrak{j}\,, \\ \mathfrak{P}_z = p\,\mathfrak{k}\,, \end{cases}$$

so daß Gleichung (3) die Form annimmt:

$$(3) \qquad \varrho \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \varrho\,\mathfrak{P} + \nabla p\,.$$

Die Eulersche Schreibweise dieser Fundamentalgleichung der Hydrodynamik erhalten wir, wenn wir die totale zeitliche Änderung der Geschwindigkeit eines Punktes mit dem Vektor $\mathfrak{r}$, also $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$, oder $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ durch die Summe der lokalen und der stationären Änderung ersetzen; es ist nach Gleichung (4) in § 28

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\nabla \mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v}] = \mathfrak{P} + \frac{1}{\varrho}\nabla p\,.$$

Hierzu kommt als weitere Fundamentalgleichung die Inkompressibilitätsbedingung, nach welcher die in ein Volumenelement einströmende Flüssigkeitsmasse Null sein muß. Die Flüssigkeitsmasse pro Zeiteinheit und Flächeneinheit ist gleich dem Produkt der Dichte in die

Geschwindigkeit. Soll die Dichte konstant sein, so ergibt sich

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 . \tag{5}$$

§ 42. Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegung.

Besitzt die Kraft $\mathfrak{P}$ ein Potential, V, ist also

$$\mathfrak{P} = \nabla V ,$$

so läßt die Gleichung (4) des § 41 sich einfacher schreiben, es ist

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \nabla\left(V + \frac{1}{\varrho}p\right) . \tag{1}$$

Hieraus können wir sofort eine Gleichung ableiten, die eine allgemeine Eigenschaft der Bewegung von Flüssigkeiten darstellt, was für Kräften die Teilchen der Flüssigkeit auch unterworfen sein mögen, wenn dieselben nur ein Potential besitzen. (Nach den Vorstellungen, die man sich von den Reibungskräften macht, gehören diese nicht dazu.) Wir haben oben gezeigt, daß die Rotation eines Gradienten Null ist; daraus folgt in vorliegendem Fall:

$$\operatorname{curl}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\right) = 0 . \tag{2}$$

Nennen wir die Rotationsgeschwindigkeit

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{curl}\mathfrak{v} = \mathfrak{w} ,$$

so können wir die Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} - \operatorname{curl}[\mathfrak{v}\operatorname{curl}\mathfrak{v}] = 0 .$$

Benutzen wir Gleichung (5) in § 31, so kommt:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{v} = 0\,,$$

oder nach Gleichung (2) in § 22:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{v}\,. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist der Ausdruck der von Helmholtz[1]) zuerst erkannten Eigenschaft reibungsloser Flüssigkeiten:

„Diejenigen Wasserteilchen, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, bekommen auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen."

Die Richtung des Vektors $\mathfrak{w}$ fällt nach der Definition in die Achse der Rotation, oder nach Helmholtz in die Richtung der Wirbellinie durch den betreffenden Punkt, indem er definiert: „Wirbellinien sind Linien, welche durch die Flüssigkeitsmasse so gezogen sind, daß ihre Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsachse der in ihnen liegenden Wasserteilchen zusammentrifft."

Die Entfernung zweier in einer Wirbellinie zu Beginn des Zeitelementes dt befindlicher, benachbarter Teilchen sei der Richtung und Größe nach durch $(\varepsilon \cdot \mathfrak{w})$ gegeben. Am Ende des Zeitelementes dt ist die Entfernung:

$$(\varepsilon\,\mathfrak{w}) + \frac{d}{dt}(\varepsilon\,\mathfrak{w})\,dt = \varepsilon\left(\mathfrak{w} + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,dt\right),$$

d. h. die Verbindungslinie der Teilchen fällt in die Richtung der Rotationsachse am Ende der Zeit dt, es bleiben also die Teilchen in ein und derselben Wirbellinie.

---

[1]) H. v. Helmholtz, Wiss. Abh., **1**, S. 101 ff.

„Eine jede Wirbellinie bleibt fortdauernd aus denselben Wasserteilchen zusammengesetzt, während sie mit diesen Wasserteilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt."

Wirbelfäden nennt Helmholtz Teile der Wassermasse, welche man dadurch aus ihr herausschneidet, daß man durch alle Punkte des Umfanges eines unendlich kleinen Flächenelementes die entsprechenden Wirbellinien konstruiert.

Man sieht sofort, daß das Produkt aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt in der ganzen Länge desselben Wirbelfadens konstant ist. Denn wenn wir von einem Querschnitt eines Wirbelfadens zum benachbarten übergehen, so ist die Änderung des Integrals dieses Produktes über den Querschnitt nach Gleichung (5) in § 28

$$(\mathfrak{w}\nabla)\int \mathfrak{w}\cdot d\mathfrak{o} = 0\,.$$

Den Betrag des Vektors $\mathfrak{w}$ bezeichnet man als Wirbelstärke, das Produkt aus Wirbelstärke in den Querschnitt eines Wirbelfadens als das Moment des Wirbelfadens. Es folgt hieraus, daß Wirbelfäden und daher auch Wirbellinien stets geschlossen sein müssen.

Besitzt die Kraft $\mathfrak{P}$ kein Potential, so ist

$$(4)\qquad \operatorname{curl}\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\right) \equiv \frac{d\mathfrak{w}}{dt} - (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{v} = \operatorname{curl}\mathfrak{P}\,.$$

Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Bewegung der Teilchen so vor sich geht, daß ein Geschwindigkeitspotential besteht, d. h. daß

$$\operatorname{curl}\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{w} = 0\,,$$

die Bewegung unter dem Einfluß von Kräften erfolgen muß, die ein Potential besitzen; in diesem Fall vereinfacht sich die Gleichung (1) bedeutend, indem dann

$$(5) \qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \tfrac{1}{2} V \mathfrak{v}^2 = V\left(V + \frac{1}{\varrho} p\right).$$

Setzen wir $\mathfrak{v} = Va$, so folgt nach Integration:

$$(6) \qquad \frac{\partial a}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(Va)^2 = V + \frac{1}{\varrho} p + \text{Funktion der Zeit.}$$

Die Inkompressibilitätsbedingung geht über in:

$$V^2 a = 0 .$$

§ 43. Solenoidaler Vektor.

Im allgemeinen wird die Geschwindigkeit der Teilchen in einer inkompressiblen Flüssigkeit die beiden Differentialgleichungen erfüllen:

$$(1) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 ,$$

$$(2) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{v} = 4\pi \mathfrak{w} .$$

Der Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeitsteilchen ist also nach § 32 ein solenoidaler Vektor eines quellenfreien Gebietes. Seine Verteilung ist durch Gleichung (1) und (2) bestimmt.

Da $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ ist, so können wir nach § 31 $\mathfrak{v}$ als die Rotation eines anderen Vektors darstellen, wir setzen:

$$(3) \qquad \mathfrak{v} = \operatorname{curl} \mathfrak{u} .$$

Dann geht (2) über in:

$$(4) \qquad \operatorname{curl}\operatorname{curl} \mathfrak{u} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathfrak{u} - V^2 \mathfrak{u} = 4\pi \mathfrak{w} .$$

Die allgemeinste Form eines Vektors ist die Summe der Rotation eines anderen Vektors und des Gradienten einer skalaren Größe. Wir können also jedenfalls schreiben:

$$\mathfrak{u} = \operatorname{curl} \mathfrak{u}' + \operatorname{grad} u'' .$$

Die Gleichung (3) bestimmt nun von dem Vektor $\mathfrak{u}$ nur den ersten Teil, während $\operatorname{grad} u''$ willkürlich gewählt werden kann, denn

$$\mathfrak{v} = \operatorname{curl}\mathfrak{u} = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{u}',$$

da

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad} u'' = 0 .$$

Der Vektor $\mathfrak{v}$ läßt sich also jedenfalls durch einen Vektor darstellen, der wieder durch die Rotation eines neuen Vektors darstellbar ist, d. h. durch einen Vektor, dessen Divergenz Null ist. Wir dürfen also $\mathfrak{u}$ in Gleichung (3) der Nebenbedingung unterwerfen:

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0 . \tag{5}$$

Dann folgt aus (4):

$$\nabla^2\mathfrak{u} = -4\pi\mathfrak{w} . \tag{6}$$

Diese Gleichung ist drei analytischen Gleichungen zwischen den drei Komponenten äquivalent, und die Form dieser Gleichungen ist dieselbe, die wir in § 34 kennen gelernt haben. Übertragen wir die obigen Resultate auf den vorliegenden Fall, so können wir schreiben:

$$\mathfrak{u} = \int \frac{\mathfrak{w}}{r}\, d\tau , \tag{7}$$

wenn wir von $\mathfrak{u}$ Stetigkeit im ganzen Raum voraussetzen und annehmen, daß es im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verschwindet, wodurch festgesetzt wird, daß $\mathfrak{v}$ wie $\frac{1}{r^2}$ im Unendlichen verschwindet. Man bezeichnet in Analogie zu dem skalaren Potential $\mathfrak{u}$ als das Vektorpotential der Vektorverteilung $\mathfrak{w}$.

Daß diese Lösung der Bedingung (5) genügt, ist durch direkte Berechnung von

$$\operatorname{div}\int\frac{\mathfrak{w}}{r}\,d\tau$$

leicht zu zeigen. Da die Rechnung indessen etwas weitläufig ist, so benutzen wir zu der Verifikation von Gleichung (5) einen anderen, bequemeren Weg.

Wir bilden von Gleichung (6) die Divergenz, also

$$\operatorname{div}\nabla^2\mathfrak{u} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{u} = \nabla^2\operatorname{div}\mathfrak{u} = -\operatorname{div}4\pi\mathfrak{w}.$$

Nun folgt aus Gleichung (2), daß

$$\operatorname{div}4\pi\mathfrak{w} = 0\,,$$

also

$$\nabla^2\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0\,.$$

Das ist nichts anderes als die Laplacesche Gleichung für $\operatorname{div}\mathfrak{u}$. Da nun $\mathfrak{u}$ wie $\frac{1}{r}$ im Unendlichen verschwinden soll, also $\operatorname{div}\mathfrak{u}$ wie $\frac{1}{r^2}$, so muß nach § 34 $\operatorname{div}\mathfrak{u} = 0$ sein, was wir beweisen wollten.

Es läßt sich also der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ schreiben:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{v} = \operatorname{curl}\int\frac{\mathfrak{w}}{r}\,d\tau \\ \quad = \operatorname{curl}\int\frac{\operatorname{curl}\mathfrak{v}}{4\pi r}\,d\tau\,, \end{cases}$$

hierin bezieht sich die Differentiation unter dem Integralzeichen auf die Änderung von $\mathfrak{v}$ an der Stelle des Elementes $d\tau$ in der Entfernung r von dem Punkt, für welchen $\mathfrak{v}$ bestimmt wird, und dessen Koordinaten die Differentiationsvariabeln des Integrals sind.

§ 44. Flächenwirbel.

Unterwerfen wir das Vektorpotential $\mathfrak{u}$ einer allgemeineren Bedingung, nämlich der, daß beim Durchschreiten von gewissen Flächen die ersten Ableitungen von $\mathfrak{u}$ in Richtung der Flächennormale Unstetigkeiten besitzen können, so daß

$$((\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{u})_1 + ((\mathfrak{n}\nabla)\mathfrak{u})_2 = 4\pi\mathfrak{x}$$

ist, so muß nach § 34 die Lösung der Gleichung (6) des vorigen Paragraphen lauten:

$$\mathfrak{u} = \int \frac{\mathfrak{w}}{r}\, d\tau - \int \frac{\mathfrak{x}}{r}\, df .$$

Für $\mathfrak{v}$ ergibt sich daraus folgende Eigenschaft. Wir bilden das Vektorprodukt des Wertes, den der Vektor $\mathfrak{v}$ an einer Stelle des Raumes in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsfläche annimmt, in die Normale der Unstetigkeitsfläche an dieser Stelle:

$$[\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{v}] = [\bar{\mathfrak{n}}, \operatorname{curl}\mathfrak{u}] = \operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n - (\bar{\mathfrak{n}}\nabla)\,\mathfrak{u} .$$

Daraus folgt:

$$4\pi\mathfrak{x} = (\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n)_1 + (\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n)_2 - [\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{v}]_1 - [\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{v}]_2 .$$

Nun ist

$$\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n = \bar{\mathfrak{n}}\operatorname{div}\mathfrak{u} .$$

und $\operatorname{div}\mathfrak{u}$ auf beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche Null, so daß

$$(\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n)_1 + (\operatorname{grad}(\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u})_n)_2 = 0$$

ist. Es bleibt also:

$$[\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{v}]_1 + [\bar{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{v}]_2 = -4\pi\mathfrak{x} .$$

Die tangentiale Komponente von $\mathfrak{v}$ erleidet beim Durchtritt durch die Fläche eine Unstetigkeit.

Die normale Komponente bleibt davon unberührt. Das ergibt sich auch aus der Bedingung, daß div $\mathfrak{v}$ im ganzen Raum Null sein soll; denn die Annahme einer Unstetigkeit der normalen Komponente an einer Fläche würde nach § 38 die Bedeutung haben, daß die Fläche eine Flächenergiebigkeit besitzt.

Zur weiteren Untersuchung der Unstetigkeit umgeben wir die Unstetigkeitsfläche mit einer sich zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche möglichst eng anschließenden, geschlossenen Fläche und bilden längs einer geschlossenen Linie auf derselben das Integral

$$\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s} .$$

Der Integrationsweg soll so zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche verlaufen, daß jedem Linienelement auf der einen Seite ein in entgegengesetzter Richtung durchlaufenes, unendlich benachbartes auf der anderen entspricht. Das Integral gibt uns die Wirbelstärke durch die von dem Integrationsweg eingeschlossene Fläche, welche zu einem um so schmäleren Streifen zusammenschwindet, je enger die Umschließungsfläche an die Unstetigkeitsfläche sich anlegt. Das Integral können wir nun in eine Summe von Integralen zerlegen, indem wir den Integrationsweg in eine Reihe geschlossener Wege teilen (Fig. 11). Da die Normalkomponente von $\mathfrak{v}$ beim Durchtritt durch die Fläche stetig bleibt, so können wir nämlich den Integrationsweg an jeder beliebigen Stelle der Fläche normal durch die Fläche hindurchlegen, wenn wir dieses hinzukommende Wegstück auch rückwärts durchlaufen. Wir zerlegen demgemäß die den Integrationsweg bildende Umrandung des schmalen Streifens in die Umrandungen beliebig vieler, aneinander stoßender, schmaler Streifen, deren Gesamtflächeninhalt und Lage

mit dem ursprünglichen identisch ist. Ein solches Streifenelement a greifen wir heraus, es mag die Länge $d\bar{s}$ und die gegen $d\bar{s}$ sehr kleine Breite dn haben. Dann geht das Integral der Umrandung dieses Streifens über in:

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\, d\bar{s} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,[d\bar{s} \cdot dn]\,,$$

oder bezogen auf die Längeneinheit von $d\bar{s}$ in:

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2) \cdot d\bar{s} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,[d\bar{s}\, dn]\,.$$

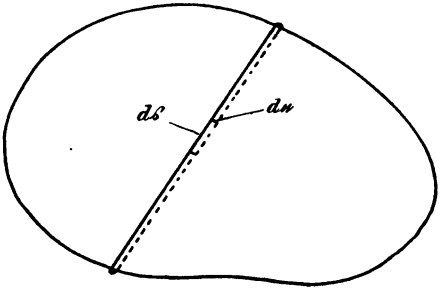

Fig. 11.

Auf der linken Seite steht die Differenz der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{v}$ in der Richtung $d\bar{s}$ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche, welche nach unserer obigen Annahme einen endlichen Wert haben soll; also ist auch der auf der rechten Seite stehende Ausdruck von endlichem Wert. Derselbe ist gleich der Wirbelkomponente durch die unendlich kleine Fläche $[d\bar{s}\, dn]$ in der Normalenrichtung dieser kleinen Fläche. Es fließt also in der Unstetigkeitsfläche ein Wirbel von unendlich großer Stärke, so daß das Produkt aus dem Querschnitt der Fläche (also einer Linie) in die Wirbelstärke von endlichem Betrage ist,

d. h. von der Größenordnung einer Raumwirbelstärke. Man nennt solche in der Fläche verlaufende Wirbel Flächenwirbel.

Kapitel 3.

Einiges aus der Theorie der Elektrizität.

§ 45. Berechnung eines beliebigen Vektorfeldes.

In § 36 wurde aus der Angabe der Quellen das wirbelfreie Vektorfeld berechnet, in § 43/4 aus der Angabe der Wirbel das quellenfreie Gebiet. Da wir, wie in § 32 gezeigt ist, jedes Vektorfeld in ein wirbelfreies und in ein quellenfreies zerlegen können, so steht der Berechnung eines beliebigen Vektorfeldes, dessen Quellen und Wirbel angegeben sind, und welches die oben geforderten Bedingungen erfüllt, nichts im Wege und wir können die Lösung, d. h. den Wert des Vektors in einem beliebigen Punkt sofort hinschreiben. Der Vektor besteht aus der Summe des Gradienten eines skalaren Potentials V und der Rotation eines Vektorpotentials $\mathfrak{u}$:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{grad} V + \operatorname{curl} \mathfrak{u} ; \tag{1}$$

V und $\mathfrak{u}$ sind durch die Ausdrücke in § 36 und 43 gegeben. Für den ersten Teil hat man, wenn wir, wie im folgenden geschehen soll, von Unstetigkeiten des Vektors und seiner Ableitungen absehen, wie oben bemerkt wurde, die Bezeichnung $\operatorname{New} \varrho$ eingeführt. Für den zweiten Teil benutzt man eine ähnliche Schreibweise. Der Vektor $\mathfrak{u}$ ist das Potential der Vektorverteilung $\mathfrak{w}$; analog der Bezeichnungsweise

$$V = \operatorname{Pot} \varrho \tag{2}$$

setzt man daher

$$\mathfrak{u} = \operatorname{Pot} \mathfrak{w} , \tag{3}$$

so daß Gleichung (1) die Form annimmt:

$$\mathfrak{W} = \nabla \operatorname{Pot} \varrho + [\nabla \operatorname{Pot} \mathfrak{w}] , \tag{4}$$

statt dessen schreibt man auch:

$$\operatorname{New} \varrho + \operatorname{Lap} \mathfrak{w} .$$

Die zweite Abkürzung ist in Erinnerung an den Namen Laplace eingeführt. Es ist neben der vektoriellen Verbindung des Hamiltonschen Operators mit einem Vektorpotential noch eine zweite, die skalare Verbindung von Wichtigkeit; auch für diese hat man eine bequemere Bezeichnung gefunden und schreibt Maxwell zu Ehren:

$$\nabla \operatorname{Pot} \mathfrak{w} = \operatorname{Max} \mathfrak{w} .$$

Für die drei Operationen ∇ Pot bestehen einige Beziehungen, die beim Rechnen mit diesen Symbolen von Nutzen sind. Es mag hier wenigstens der folgende Satz angeführt werden, dessen Beweis durch eine einfache Überlegung geführt werden kann und daher dem Leser überlassen sei.

V und u sind Raumintegrale von der Form

$$\iiint \frac{\varrho}{r} d\tau .$$

Darin ist r die Entfernung des Elementes $d\tau$ mit der Dichte ϱ von dem Punkt, für welchen das Potential gesucht wird, dessen Koordinaten unter dem Integralzeichen als Parameter auftreten, während dieselben bei den in Gleichung (4) durch ∇ geforderten Differentiationen die Rolle der Differentiationsvariablen übernehmen. Statt der Differentiation des Integrals nach dem Parameter kann unter dem Integral die Funktion ϱ nach den Integrationsvariablen differenziert werden, wenn ϱ und seine ersten Ableitungen endlich und stetig sind sowohl in dem betrachteten Raum als an der Oberfläche; es ist also

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \operatorname{Pot} \varrho = \operatorname{Pot} \nabla \varrho \\ [\nabla \operatorname{Pot} \mathfrak{w}] = \operatorname{Pot} \operatorname{curl} \mathfrak{w} \\ \nabla \operatorname{Pot} \mathfrak{w} = \operatorname{Pot} \operatorname{div} \mathfrak{w} . \end{array} \right. \tag{5}$$

Die letzte Gleichung zeigt unmittelbar, wenn $\mathfrak{u}$ der Gleichung (7) in § 43 genügt, also

$$\mathfrak{u} = \operatorname{Pot}\mathfrak{w}\,, \quad \text{wobei} \quad 4\pi\mathfrak{w} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}\,,$$

daß:

$$\operatorname{div}\mathfrak{u} = \operatorname{div}\operatorname{Pot}\mathfrak{w} = \operatorname{Pot}\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0\,.$$

Bezieht sich das Integral $\operatorname{Pot}\varrho$ auf eine diskontinuierlich abgegrenzte Masse von der Dichte ϱ, so ist $\nabla\varrho$ an der Grenze sinnlos; in diesem Fall gilt statt Gleichung (5) die folgende Formel:

$$(5') \qquad \nabla\operatorname{Pot}\varrho = \operatorname{Pot}\nabla\varrho + \iint \frac{\varrho}{r}\,d\mathfrak{o}\,;$$

hierin bezieht sich $\nabla\varrho$ auf das Innere der abgegrenzten Masse, wo es stetig ist; das zweite Glied auf der rechten Seite ist ein Integral über die Oberfläche des Körpers, das unter dem Integralzeichen stehende ϱ bezeichnet die Dichte des Körpers in unmittelbarer Nähe der Oberfläche.

§ 46. Elektromagnetische Gleichungen von Maxwell-Lorentz.

Die wichtigste Anwendung in der mathematischen Physik hat die Vektorentheorie seit Maxwell bei der Darstellung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen gefunden. Die Maxwellsche Beschreibung dieser Erscheinungen verwendet die folgenden Vektoren.

$\mathfrak{E}$ resp. $\mathfrak{H}$ die elektrische, resp. magnetische Feldstärke, welche der Größe und Richtung nach die Kraft eines elektrischen, resp. magnetischen Feldes auf die Elektrizitätsmenge e, resp. den magnetischen Pol m, an dem betreffenden Punkt bestimmt, nachdem wir die Kraft durch Division mit e resp. m auf die Einheitsladung reduziert haben (e resp. m als unendlich klein und von unendlich kleiner materieller Ausdehnung vorausgesetzt). Die Einheitsladung ist dadurch festgesetzt, daß

die Größe der abstoßenden Kraft zweier in der Entfernung r befindlicher Körper mit den Ladungen e und e', resp. m und m'

$$\frac{e\,e'}{4\,\pi\,r^2}, \quad \text{resp.} \quad \frac{m\,m'}{4\,\pi\,r^2}$$

beträgt.

$\mathfrak{D}$ die elektrische Erregung oder die dielektrische Verschiebung. Dieser Vektor wird so gewählt, daß der Vektorfluß durch das Flächenelement $d\sigma$, also $\mathfrak{D}\,d\sigma$ gleich ist der Elektrizitätsmenge, welche das Element seit der Zeit durchflossen hat, zu welcher die Materie keinen elektrischen und magnetischen Einflüssen ausgesetzt war. In der Elektrostatik ist also

$$\int \mathfrak{D}\,d\sigma = \Sigma e\,,$$

die gesamte elektrische Erregung durch eine geschlossene Fläche gleich den gesamten von der Fläche umschlossenen elektrischen wahren Ladungen.

Für isotrope Körper mit der Dielektrizitätskonstante ε besteht zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die einfache Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}\,.$$

Die Änderung von $\mathfrak{D}$ mit der Zeit an einem bestimmten Punkt des Raumes konstituiert einen elektrischen Strom, den Maxwell Verschiebungsstrom nennt. Im Innern der leitenden Materie besteht außer diesem Verschiebungsstrom ein Konvektionsstrom elektrisch geladener Teilchen, dessen Geschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{v}$ gegeben sein mag, und der mit dem elektrischen Strom der älteren Theorie zusammenfällt. Der Gesamtstrom ist danach

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{v}\,.$$

Diesen Vektor $\mathfrak{S}$ nimmt die Theorie als stets solenoidal verteilt an, so daß er als Rotation eines anderen Vektors sich schreiben lassen muß.

$\mathfrak{B}$ die magnetische Induktion oder magnetische Erregung. Von diesem Vektor erhalten wir eine Anschauung, wenn wir an die durch das Faradaysche Induktionsgesetz angegebene Erfahrung erinnern. Es wird in einen geschlossenen Stromkreis ein elektrischer Strom induziert, wenn an der Stelle ein magnetisches Feld erregt oder verändert wird. Die Elektrizitätsmenge, die durch den Querschnitt des Stromleiters bei der Erregung eines magnetischen Feldes hindurchtritt, ist proportional der von dem Leiter umschlossenen Fläche, umgekehrt proportional dem elektrischen Leitungswiderstand in demselben und proportional der magnetischen Erregung durch die Fläche, welche wesentlich von dem Medium, in dem die Erregung stattfindet, abhängig ist. Im einfachsten Fall, dem freien Äther, ist die Erregung gleich der dort vorhandenen Feldstärke; in einem isotropen Medium setzt man $\mathfrak{B}$ proportional $\mathfrak{H}$, der Proportionalitätsfaktor ist die Permeabilität μ des Mediums, so daß

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} .$$

Diese Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$ stehen miteinander durch die folgenden Grundgleichungen in Beziehung:

$$(1) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{1}{v} \mathfrak{S} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v} \right),$$

$$(2) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = - \frac{1}{v} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} ,$$

worin v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Außerdem gilt:

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0\,,$$
$$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho\,,$$

wenn ϱ die Dichte der Elektrizität an der betreffenden Stelle bedeutet. Aus der Allgemeingültigkeit der Gleichung (1) folgt:

$$\operatorname{div}\mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial t}\varrho + \operatorname{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0\,,$$

welches aussagt, daß die Ladung jedes Massenelementes während der Bewegung unverändert bleiben soll. (Kontinuitätsgleichung der Elektrizität.)

§ 47. Biot-Savartsches Gesetz.

Haben wir es mit einem stationären Strom in einem ponderablen Leiter zu tun, so geht der Gesamtstrom $\mathfrak{S}$ in den Konvektionsstrom $\varrho\,\mathfrak{v}$ über. Die magnetische Wirkung, die von demselben ausgeht, ist gegeben durch:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = \frac{1}{v}\mathfrak{S} = \frac{1}{v}\varrho\,\mathfrak{v}\,,$$
$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0\,.$$

Daraus folgt nach § 45, Gleichung (4):

$$(1) \qquad 4\pi\mathfrak{H} = \operatorname{Lap}\frac{1}{v}\mathfrak{S}\,,$$

oder, wenn wir den zur Stromrichtung senkrechten Querschnitt des stromdurchflossenen, für das Folgende als unendlich dünn angenommenen Leiters mit $\mathfrak{q}$, die Stromstärke mit

$$i = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{S}}{v}$$

bezeichnen:

$$4\pi\mathfrak{H} = \mathrm{Lap}\frac{i}{q}\overline{\mathfrak{S}}\,.$$

Das stellt das Biot-Savartsche Gesetz der Erzeugung eines magnetischen Feldes durch einen elektrischen Strom dar. Um die Übereinstimmung mit der gewohnten Form zu zeigen, gehen wir auf die Bedeutung von Lap zurück:

$$\mathrm{Lap}\,\mathfrak{w} = [\nabla\,\mathrm{Pot}\,\mathfrak{w}]\,,$$

worin die Differentiation sich auf den Parameter in $\mathfrak{r}$, welches unter dem Potentialzeichen enthalten ist, bezieht. Derselbe bestimmt die Lage des Punktes, für den das Potential zu bilden ist, also in dem speziellen Fall der Gleichung (1) die Lage des Ortes, für den $\mathfrak{H}$ angegeben werden soll. Die Differentiation nach diesem Parameter können wir auch unter dem Integralzeichen ausführen, so daß wir erhalten:

$$\mathrm{Lap}\,\mathfrak{w} = \iiint\left[\nabla\frac{\mathfrak{w}}{r}\right]d\tau\,; \tag{2}$$

$\mathfrak{w}$ ist nun unabhängig von dem Parameter, wir können daher die Funktion mit dem dreifachen Integral nach § 31, Gleichung (2) schreiben:

$$\left[\nabla\frac{\mathfrak{w}}{r}\right] = -\left[\mathfrak{w}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right] = -\left[\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{w}}{r^3}\right].$$

Danach ist also

$$4\pi\mathfrak{H} = -\int\left[\frac{\mathfrak{r}\,i\overline{\mathfrak{S}}}{q\,r^3}\cdot d\tau\right], \tag{3}$$

oder, wenn wir $d\tau = \mathfrak{q}\cdot d\mathfrak{s}$ setzen und beachten, daß $\overline{\mathfrak{S}}$ und $d\mathfrak{s}$ die gleiche zu $\mathfrak{q}$ senkrechte Richtung haben, so daß wir

$$\overline{\mathfrak{S}}\,(\mathfrak{q}\cdot d\mathfrak{s}) = d\mathfrak{s}\,(\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathfrak{S}}) = d\mathfrak{s}\cdot q$$

setzen dürfen:

$$4\pi\mathfrak{H} = -\int\left[\frac{\mathfrak{r}\,i}{r^3}\,d\mathfrak{s}\right]. \tag{3'}$$

Wir können also den Vektor $\mathfrak{H}$ als eine Summe von Elementen $[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]\frac{i}{r^3}$ auffassen. Jedes Stromelement $i\,d\mathfrak{s}$ ruft in der Entfernung r eine magnetische Kraft hervor, welche proportional dem Sinus des Winkels zwischen Stromelement und Verbindungslinie, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist und auf der Ebene der Verbindungslinie und des Stromelementes senkrecht steht. Die Vektoren $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$, $[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]\frac{i}{r^3} = 4\pi\,d\mathfrak{H}$ folgen aufeinander, wie es die Ampèresche Schwimmerregel verlangt.

Wie wir Lap $\mathfrak{w}$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen umformten, so können wir auch mit Max $\mathfrak{w}$ und New ϱ eine Transformation vornehmen:

$$\mathfrak{a} = V\,\mathrm{Pot}\,V = \mathrm{New}\,\varrho = \iiint\frac{\mathfrak{r}\cdot V}{r^3}\,d\tau\,; \tag{4}$$

aus dieser Summe ergibt sich unmittelbar, daß $\mathfrak{a}$ aufgefaßt werden kann als eine geometrische Summe von Kräften, welche alle, von verschiedenen Volumenelementen herrührend, an der Stelle wirksam sind, für die $\mathfrak{a}$ berechnet wird, und deren jede der Größe und Richtung nach durch das Newtonsche Gesetz bestimmt ist.

§ 48. Elektrische Polarisation.

Als Anwendung des Ausdruckes Max soll das Potential eines elektrostatischen Feldes, in welches Leiter und Isolatoren eingelagert sind, durch das Potential, welches

von den wahren Ladungen herrührt, und das Potential der elektrischen Polarisation des Dielektrikums ausgedrückt werden. Die Verteilung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ sei bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho',$$

$$\text{(2)} \qquad (\mathfrak{E}\,\bar{n})_1 + (\mathfrak{E}\,\bar{n})_2 = \omega',$$

worin ϱ' und ω' als die Dichten der freien Elektrizität bezeichnet werden. Da in einem elektrostatischen Feld

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = 0$$

ist, muß $\mathfrak{E}$ von einem Potential ableitbar sein. Es sei also

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{E} = -\nabla\varphi,$$

wobei φ aus Gleichung (1) und (2) sich bestimmt zu:

$$\text{(4)} \qquad 4\pi\varphi = \int\frac{\varrho'}{r}\,d\tau + \int\frac{\omega'}{r}\,df.$$

Das Raumintegral ist über den ganzen mit Dielektrikum erfüllten Raum auszudehnen; im Innern eines Leiters ist ϱ' Null. Das Oberflächenintegral bezieht sich auf sämtliche Trennungsflächen verschiedener Dielektrika voneinander, der Dielektrika von den Leitern und vom Äther und endlich der Leiter vom Äther. Die Trennungsflächen zwischen verschiedenen Dielektrika können wir ersetzen durch schmale Streifen, in denen wir einen inhomogenen, stetigen Übergang von einem zum anderen Dielektrikum annehmen, so daß die freien Ladungen an diesen Trennungsflächen als räumliche freie Ladungen in dem ersten Integral berücksichtigt gedacht werden können.

Da ferner im Äther sowie im Leiter

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0,$$

so bleibt in Gleichung (2), auf welche Trennungsfläche sie sich auch beziehen mag, auf der linken Seite nur ein Glied stehen, welches von der Seite der Trennungsfläche zweier Medien herrührt, die nach dem Dielektrikum gerichtet ist. Mit Abtrennung des Potentials, welches sich auf die an den Leiteroberflächen befindlichen wahren Ladungen bezieht,

$$\int \frac{\omega}{r}\, df,$$

können wir also schreiben:

$$4\pi\varphi = \int \frac{\omega}{r}\, df + \int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{E}}{r}\, d\tau + \int \left(\frac{1}{r}(\mathfrak{E}\,\bar{n}) - \frac{\omega}{r}\right) df.$$

Bedenken wir nun, daß ω, die Dichte der wahren Elektrizität, bestimmt ist durch

$$(\mathfrak{D}\,n)_1 + (\mathfrak{D}\,n)_2 = \omega,$$

und daß sich diese Ladungen nur an der Oberfläche des Leiters befinden, so daß auch in dieser Gleichung das eine Glied der linken Seite Null ist, welches sich auf die nach dem Innern des Leiters gelegenen Seite der Oberfläche bezieht, und daß für den gesamten übrigen Raum $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$ ist, so können wir einfacher schreiben:

$$4\pi\varphi = \int \frac{\omega}{r}\, df - \int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{P}}{r}\, d\tau + \int \frac{1}{r}\, \mathfrak{P}\cdot\bar{n}\, df,$$

wenn

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}$$

gesetzt wird und die Richtung der Normale $\bar{n}$, wie wir es gewohnt sind, nach dem Außenraum, über welchen nicht integriert wird, angenommen ist. Der Integrationsraum ist das Dielektrikum.

Die beiden letzten Integrale können wir aber ersetzen durch

$$\nabla \int \frac{\mathfrak{P}}{r} d\tau = \operatorname{Max} \mathfrak{P} = \iiint \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{P}}{r^3} d\tau ,$$

so daß

$$4\pi\varphi = \int \frac{\omega}{r} df + \operatorname{Max} \mathfrak{P} . \tag{5}$$

Die Bedeutung des Ausdruckes erkennen wir, wenn wir setzen

$$\operatorname{Max} \mathfrak{P} = \int (\bar{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{P}) \left(\bar{\mathfrak{r}} \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau ;$$

zerlegen wir darin $d\tau$ in $d\mathfrak{o} \cdot d\mathfrak{h}$, worin $d\mathfrak{o}$ ein Flächenelement, $d\mathfrak{h}$ eine sehr kleine Leitlinie bedeutet, so kommt, da die beiden Klammerausdrücke als skalare Größen anders gruppiert werden können:

$$\operatorname{Max} \mathfrak{P} = \iint \left(\left(\bar{\mathfrak{r}} (\bar{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{P}) \nabla \frac{1}{r} \right) d\mathfrak{o} \right) d\mathfrak{h} .$$

Der Vergleich des inneren Integrals mit den Resultaten des § 39 zeigt, daß $\bar{\mathfrak{r}} (\bar{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{P})$ das Moment einer Doppelquelle an dem Flächenelement $d\mathfrak{o}$ bedeutet.

Die in Gleichung (5) angegebene Form ergibt also eine Zerlegung des Potentials in ein Potential, welches von der wahren Elektrizität herrührt, und ein solches, welches von einem durch das ganze Dielektrikum verteilten System von Doppelquellen abgeleitet werden kann.

III. Teil.

Lineare Vektorfunktionen und Dyadenrechnung.

§ 49. Lineare Vektorfunktionen.

Das totale Differential eines Vektors in einer bestimmten Richtung hängt im allgemeinen von der Richtung und von der Größe der Strecke, für die die Änderung bestimmt wird, ab. Aus der bei Differentiationen stets angewandten Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung ergibt sich von selbst, daß das totale Differential eine lineare, homogene Funktion der Streckengrößen, längs deren die Änderung vorgenommen wird, ist, oder daß, wie man sagt, der Vektor, dessen totales Differential gebildet wird, in dem betrachteten, unendlich kleinen Raum in homogener Verteilung gegeben ist. Auch in endlichen Raumgebieten kommen homogene Vektorverteilungen vor, nämlich wenn der Unterschied zweier Werte des Vektors am Anfang und Ende einer gegebenen Strecke nur von der Länge und Richtung derselben, nicht aber von der absoluten Lage des Anfangspunktes abhängt. Die linearen Vektorfunktionen, mit denen wir es in diesen Fällen zu tun haben, sind als die einfachste Gruppe der Vektorfunktionen näherer vektoranalytischer Untersuchung unterzogen worden, es soll daher auf diese neuere von Gibbs und Voigt zuerst ausgearbeitete, von Wilson und Jaumann weitergeführte vektoranalytische Darstellung der linearen Vektorfunktionen eingegangen werden. Anwendungen dieser Untersuchungen wurden mit besonderem Erfolg von Abraham

in der Elektronenlehre, von Jaumann in der Mechanik starrer und deformierbarer Medien gemacht.

Eine kontinuierliche Funktion eines Vektors ist eine lineare Vektorfunktion, wenn die Funktion der Summe zweier Vektoren gleich der Summe der Funktionen dieser Vektoren ist.

Wir wollen als Bezeichnung einer linearen Vektorfunktion eines Vektors vor diesen Vektor den Buchstaben Φ schreiben. Ist also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine lineare Vektorfunktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$, so ist

$$\mathfrak{v} = \Phi \cdot \mathfrak{r}, \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2 = \Phi \cdot (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2); \tag{2}$$

die Änderung einer linearen Funktion des Vektors $\mathfrak{r}$ ist nur abhängig von der Größe und Richtung der Änderung des Vektors $\mathfrak{r}$, nicht aber von dem absoluten Werte desselben, d. h. von der Anfangs- oder Endlage selbst.

§ 50. Die Dyade.

Die allgemeinste Form einer linearen, homogenen Funktion f von $\mathfrak{r}$ werden wir erhalten, wenn wir eine Summe von Gliedern bilden, unter denen alle möglichen Kombinationen vorkommen, welche $\mathfrak{r}$ mit Skalaren oder Vektoren bilden kann, derart, daß jedes Glied linear in $\mathfrak{r}$ ist und alle Glieder entweder nur vektorielle oder nur skalare Größen sind. Im ersteren Fall erhalten wir eine vektorielle, lineare, homogene Funktion, im zweiten eine skalare. Die Formen sind:

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{r}' = \sum_i \mathfrak{a}_i (\mathfrak{b}_i \mathfrak{r}) + \sum_k \mathfrak{r} (\mathfrak{c}_k \mathfrak{d}_k) + \sum_l [\mathfrak{r} [\mathfrak{e}_l \mathfrak{f}_l]] \\ \qquad\qquad + \sum_m [\mathfrak{g}_m [\mathfrak{h}_m \mathfrak{r}]] \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{r}' = \sum_i a_i (\mathfrak{b}_i \mathfrak{r}) + \sum_k [\mathfrak{r}\, \mathfrak{c}_k]\, \mathfrak{d}_k \,. \tag{2}$$

Sie lassen sich sofort wesentlich vereinfachen, wenn wir an Stelle des Vektors die Komponenten in drei nicht komplanaren Richtungen einführen:

$$\mathfrak{r} = r_1 \mathfrak{i} + r_2 \mathfrak{j} + r_3 \mathfrak{k} \,. \tag{3}$$

Wir können dann die Summe nach r_1, r_2, r_3 ordnen und erhalten:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{r}' &= r_1 \{A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k}\} \\ &+ r_2 \{B_1 \mathfrak{i} + B_2 \mathfrak{j} + B_3 \mathfrak{k}\} \\ &+ r_3 \{C_1 \mathfrak{i} + C_2 \mathfrak{j} + C_3 \mathfrak{k}\} \end{aligned} \right. \tag{1'}$$

und

$$\mathfrak{r}' = r_1 D_1 + r_2 D_2 + r_3 D_3 \,. \tag{2'}$$

Die homogene, lineare, skalare Funktion des Vektors $\mathfrak{r}$, die also in jedem Fall in die Form (2') gebracht, oder wenn

$$D_1 \mathfrak{i} + D_2 \mathfrak{j} + D_3 \mathfrak{k} = \mathfrak{D}$$

mit dem absoluten Betrag D gesetzt wird, in der Form

$$\mathfrak{r}' = (\mathfrak{r}\, \mathfrak{D})$$

geschrieben werden kann, bedarf keiner näheren, allgemeinen Untersuchung; sie ist durch Angabe eines Vektors $\mathfrak{D}$ oder dreier skalarer Größen vollständig bestimmt.

Die homogene, lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}'$ ist, wie Gleichung (1') zeigt, vollständig bestimmt, wenn sie in drei nicht komplanaren Richtungen gegeben ist; z. B. in den Richtungen der durch die Klammerausdrücke bestimmten Vektoren.

Man sieht, daß die lineare skalare Funktion die Rolle einer Komponente einer linearen vektoriellen Funktion spielt.

Zur allgemeinen Beweisführung mögen die Werte der Funktion $\mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r})$ für die drei Werte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ des Argumentes $\mathfrak{r}$ unter der Voraussetzung, daß die Richtungen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ nicht komplanar sind, gegeben sein, und zwar sei

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{r}'_1 = f(\mathfrak{a}), \\ \mathfrak{r}'_2 = f(\mathfrak{b}), \\ \mathfrak{r}'_3 = f(\mathfrak{c}). \end{cases}$$

Dann folgt für den Vektor

$$(5) \qquad \mathfrak{r} = a\,\mathfrak{a} + b\,\mathfrak{b} + c\,\mathfrak{c}$$

nach Gleichung (2) von § 49 der Wert

$$(6) \qquad \mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r}) = a\,\mathfrak{r}'_1 + b\,\mathfrak{r}'_2 + c\,\mathfrak{r}'_3 .$$

Zur Bestimmung einer linearen Vektorfunktion bedarf es also der Angabe von neun Bestimmungsstücken, nämlich der Angabe von drei Vektoren, deren jeder den Wert der Funktion in einer zu den zwei anderen nicht komplanaren Richtung angibt.

Gleichung (1′) kann man in eine andere Form überführen, es ist

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{i}\,\mathfrak{r}\{A_1\,\mathfrak{i} + A_2\,\mathfrak{j} + A_3\,\mathfrak{k}\} + \mathfrak{j}\,\mathfrak{r}\{\ldots\} + \mathfrak{k}\,\mathfrak{r}\{\ldots\},$$

oder wenn wir für die Klammern die Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ setzen:

$$(7) \qquad \mathfrak{r}' = \mathfrak{A}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{j}\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{C}(\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}).$$

Statt dessen schreiben Gibbs und Wilson symbolisch:

$$(7') \qquad \mathfrak{r}' = (\mathfrak{A}; \mathfrak{i} + \mathfrak{B}; \mathfrak{j} + \mathfrak{C}; \mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{r}$$

oder

$$= \mathfrak{r} \cdot (\mathfrak{i}; \mathfrak{A} + \mathfrak{j}; \mathfrak{B} + \mathfrak{k}; \mathfrak{C}),$$

wobei das Zeichen ; zwischen zwei Vektoren die Verwechselung mit dem skalaren Produkt derselben ausschließen soll; der Punkt soll andeuten, daß der Vektor r der Faktor eines skalaren Produktes ist; aus der Stellung der übrigen Vektoren ergibt sich dann eindeutig, daß i, j, ℓ die resp. anderen Faktoren sind. Die Operation, die durch die Schreibweise $\mathfrak{A}$; i angedeutet ist, bezeichnet man als Dyade. Die allgemeine Form einer Dyade, die also eine Vektorfunktion bestimmt, ist:

$$(8) \qquad (\mathfrak{A}; \mathfrak{i} + \mathfrak{B}; \mathfrak{j} + \mathfrak{C}; \mathfrak{k}) \cdot .$$

Statt dessen schreibt man auch:

$$(8') \qquad \begin{cases} \Phi = A_1 \mathfrak{i}\mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j}\mathfrak{i} + A_3 \mathfrak{k}\mathfrak{i} \\ \quad + B_1 \mathfrak{i}\mathfrak{j} + B_2 \mathfrak{j}\mathfrak{j} + B_3 \mathfrak{k}\mathfrak{j} \\ \quad + C_1 \mathfrak{i}\mathfrak{k} + C_2 \mathfrak{j}\mathfrak{k} + C_3 \mathfrak{k}\mathfrak{k} \end{cases}$$

oder endlich

$$(8'') \qquad \Phi = \mathfrak{A}; \mathfrak{a} + \mathfrak{B}; \mathfrak{b} + \mathfrak{C}; \mathfrak{c},$$

worin die Ersetzung von i, j, ℓ durch a, b, c andeuten soll daß man die Wahl der Vektoren keiner Einschränkung unterwirft. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ nennt man die Antezedenten, a, b, c die Konsequenten. Bei willkürlicher Wahl einer der beiden Gruppen — freilich unter der einen Bedingung, daß die drei Vektoren nicht komplanar sind — ist zur vollständigen Bestimmung der Dyade die Angabe der anderen Gruppe erforderlich und hinreichend.

§ 51. Anwendung.

Zur Darstellung einer unendlich kleinen Deformation eines mit Masse kontinuierlich erfüllten Raumgebietes bedient man sich der folgenden Gleichungen. Es seien die Verrückungen des Punktes x_1, y_1, z_1 durch die

Werte ξ_1, η_1, ζ_1, die des Nachbarpunktes x_2, y_2, z_2 durch ξ_2, η_2, ζ_2 gegeben, dann gilt:

$$(1)\quad \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (y_2 - y_1)\frac{\partial \xi}{\partial y} + (z_2 - z_1)\frac{\partial \xi}{\partial z}$$

und entsprechende Gleichungen für:

$$\eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1;$$

$\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1$ sind die Komponenten der relativen Verrückungen benachbarter Punkte und sind durch diese Gleichungen, wenn die Koeffizienten $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots$ bekannt sind, als lineare Funktionen der Komponenten $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ ausgedrückt; mit anderen Worten, der Vektor $d\mathfrak{v}$ mit den Komponenten $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1$ ist linear durch den Vektor $d\mathfrak{r}$ mit den Komponenten $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ dargestellt. Um die Vektorenschreibweise einzuführen, setzen wir

$$\xi\mathfrak{i} + \eta\mathfrak{j} + \zeta\mathfrak{k} = \mathfrak{v},$$

dann geht das System von Gleichungen über in:

$$(2)\quad d\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x};\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y};\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z};\mathfrak{k}\right)\cdot d\mathfrak{r} = \Phi \cdot d\mathfrak{r},$$

indem für den Klammerausdruck, welcher eine Dyade darstellt, die oben eingeführte Bezeichnung gewählt ist. In ausführlicher Schreibweise ist

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{\partial \xi}{\partial x}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\mathfrak{k}\mathfrak{i} \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial y}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\mathfrak{k}\mathfrak{j} \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial z}\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\mathfrak{k}\mathfrak{k}; \end{aligned}\right.$$

statt dessen kann man auch, ohne mißverständlich zu werden, schreiben:

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}, \dfrac{\partial\eta}{\partial x}, \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} \\ \qquad \dfrac{\partial\xi}{\partial y}, \dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} \\ \qquad \dfrac{\partial\xi}{\partial z}, \dfrac{\partial\eta}{\partial z}, \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}. \end{array}\right.$$

Wir wollen nun sogleich auch von dieser Schreibweise bei der in § 22 gegebenen Form des totalen Differentials Gebrauch machen.

Nach der in § 22 gewählten Ausdrucksweise können wir die linke Seite der Gleichung (2) in der symbolischen Form schreiben:

$$(5)\qquad (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\xi\,\mathfrak{i} + (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\eta\,\mathfrak{j} + (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\zeta\,\mathfrak{k}.$$

Darin ist

$$\begin{aligned}(d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\xi &= (x_2 - x_1)\frac{\partial\xi}{\partial x} + (y_2 - y_1)\frac{\partial\xi}{\partial y} + (z_2 - z_1)\frac{\partial\xi}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\mathfrak{k}\right)\cdot d\mathfrak{r}.\end{aligned}$$

Behalten wir für Φ die durch Gleichung (3) oder (4) gegebene Bedeutung bei, so ist, wie die ausführliche Schreibweise lehrt, in der Tat

$$(6)\qquad (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{v} = \Phi\cdot d\mathfrak{r}.$$

Betrachten wir hierin, wie schon des öfteren, den Operator ∇ als einen symbolischen Vektor:

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

und $(d\mathfrak{r}\nabla)$ als skalares Produkt zweier Vektoren, so ergibt die Vergleichung mit Gleichung (7) und (7′) in § 50, daß $(d\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{v}$ eine aus den Vektoren ∇ und $\mathfrak{v}$ gebildete, mit $d\mathfrak{r}$ multiplizierte Dyade darstellt. An Stelle von $\Phi \cdot d\mathfrak{r}$ können wir schreiben $d\mathfrak{r} \cdot \Phi'$, wenn wir mit Φ' die aus Φ durch Vertauschung der Antezedenten mit den Konsequenten entstehende Dyade bezeichnen; dann ist nach Gleichung (8″) in § 50

$$(7) \qquad \Phi' = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}; \mathfrak{v} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y}; \mathfrak{v} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}; \mathfrak{v} = \nabla; \mathfrak{v} = \cdot \nabla\mathfrak{v}$$

und

$$(8) \qquad d\mathfrak{r} \cdot \nabla; \mathfrak{v} = d\mathfrak{r} \cdot \Phi',$$

wofür wir oben geschrieben haben $(d\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{v}$.

Diese neue Darstellungsweise des totalen Differentials ist im Gegensatz zu der früher angewandten nicht eine rein symbolische. Vielmehr ist eine Dyade ein reales physikalisches Gebilde; und diese reale Größe Φ' ist mit einem realen Vektor multipliziert.

Zu dieser Erkenntnis führt uns die folgende Betrachtung, welche lehrt, daß eine Dyade unter dem Bilde einer Fläche zweiten Grades vorstellbar ist.

Durch die Gleichung (2) oder (6) ist die relative Verrückung $d\mathfrak{v}$ zweier Punkte in der durch den Vektor $d\mathfrak{r}$ bestimmten Entfernung gegeben. Es soll untersucht werden, auf welcher Fläche der Endpunkt der auf verschiedene Richtungen $d\mathfrak{r}$ bezüglichen Verrückung $d\mathfrak{v}$ pro Längeneinheit von $d\mathfrak{r}$ liegt, wenn der Anfangspunkt immer in den gleichen Punkt gelegt wird. Wenn $d\mathfrak{v}$ eine lineare Vektorfunktion von $d\mathfrak{r}$ ist, so muß auch $d\mathfrak{r}$ sich als lineare Funktion von $d\mathfrak{v}$ darstellen lassen, da die Angabe der linearen Vektorfunktion äquivalent drei linearen, voneinander unabhängigen Gleichungen zwischen den drei Komponenten der beiden in Beziehung gesetzten Vektoren ist. Es ist also auch

$$(9) \qquad d\mathfrak{r} = \Phi_1 \cdot d\mathfrak{v}.$$

Es sei nun $d\mathfrak{r}$ ein Einheitsvektor, wir multiplizieren die Gleichung mit sich selbst skalar, so kommt:

$$1 = (\Phi_1 \cdot d\mathfrak{v})^2, \tag{10}$$

welches eine quadratische Gleichung des Vektors $d\mathfrak{v}$ ist. Der Endpunkt von $d\mathfrak{v}$ liegt also auf einer Fläche zweiten Grades, die, wenn wir Endlichkeit aller Verrückungen des betrachteten Systems voraussetzen wollen, ein Ellipsoid sein muß. Dieses Ellipsoid ist vollständig definiert durch die Koeffizienten der Dyade Φ_1 oder Φ.

§ 52. Die skalare und rotorische Dyade.

Die Vektorsummen der linearen Funktion (1) in § 50 lassen sich noch in anderer als der durch Gleichung (1′) dargestellten Weise zusammenfassen, nämlich in einer Summe von dreifachen Vektorprodukten, abgesehen von einem additiv hinzukommenden Glied, welches aus dem mit einer Skalaren multiplizierten Argument gebildet ist.

Gleichung (1′) des § 50 können wir schreiben:

$$\begin{cases} \mathfrak{r}' = (\mathfrak{i}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{j}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{B} + (\mathfrak{k}\,\mathfrak{r})\,\mathfrak{C} \\ \quad = [\mathfrak{i}\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}]] + [\mathfrak{j}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}]] + [\mathfrak{k}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}]] + \mathfrak{r}(\mathfrak{i}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{j}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{k}\,\mathfrak{C}), \end{cases} \tag{1}$$

wobei keine Voraussetzungen über die Richtungen $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ gemacht sind, nur dürfen sie nicht komplanar sein. Symbolisch schreibt man:

$$\begin{cases} \mathfrak{r}' = [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{A} + \mathfrak{b}\,[\mathfrak{B} + \mathfrak{c}\,[\mathfrak{C}, \mathfrak{r}]] + D\mathfrak{r} \\ \quad = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{C}) \times \mathfrak{r} + D\mathfrak{r}, \end{cases} \tag{2}$$

worin an Stelle der Vektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ zur Andeutung der Allgemeingültigkeit drei beliebige, nicht komplanare Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gesetzt sind.

Man bezeichnet auch diese Operation, die durch die Schreibweise:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{A} \times \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \times \mathfrak{A} \tag{3}$$

angedeutet wird, als Dyade, und zum Unterschied nennt man die früher abgeleitete Form eine skalare oder lineare, die hier behandelte eine rotorische oder planare Dyade. Die Summe beliebig vieler gleichartiger Dyaden läßt sich zu einer Summe von höchstens drei Dyaden derselben Art zusammenfassen. Für skalare Dyaden geht das unmittelbar aus der Ableitung dieses Begriffes hervor. Für rotorische Dyaden ergibt es sich in folgender Weise. Es sei eine Summe von mehr als drei rotorischen Dyaden gegeben; wir benutzen dieselbe zur Darstellung einer linearen Vektorfunktion. Jede lineare Vektorfunktion läßt sich aber, wie wir eben gesehen haben, in die Summe dreier rotorischer Dyaden und einen additiven, dem Argument der linearen Vektorfunktion parallelen Vektor zusammenfassen. Nun läßt sich ein variabler Vektor nicht durch ein vektorielles Tripelprodukt von der Form $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]$ darstellen, in welchem der betreffende Vektor selbst ein Faktor ist; es kann also der additive Vektor in der linearen Vektorfunktion auch nicht aus einer rotorischen Dyade entstanden sein, d. h. da wir nur eine Summe von rotorischen Dyaden angenommen hatten, muß der absolute Betrag dieses Vektors Null sein. Die Summe ist also dargestellt durch drei rotorische Dyaden. Man bezeichnet die auf drei Glieder reduzierten, nicht weiter reduzierbaren Dyaden als komplette Dyaden.

Explizite können wir diese Zusammenfassung einer Summe von skalaren oder rotorischen Dyaden in drei Glieder, wenn wir von der in § 15 angegebenen Darstellung eines Vektors durch die Summe dreier Vektoren von willkürlich vorgegebenen Richtungen Gebrauch machen, sofort hinschreiben.

Es seien die beiden Arten von Dyaden der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ unter der Schreibweise $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zusammengefaßt.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mögen drei willkürlich vorgelegte, nicht komplanare Vektoren sein, die wir als Antezedenten oder Konsequenten der kompletten Dyade wählen wollen, dann kann

$$(4) \qquad \sum_i \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}, \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$$

gesetzt werden, worin die Vektoren $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ aus den unter dem Summenzeichen enthaltenen, gegebenen Vektoren, wie folgt, zu berechnen sind. Es ist nach § 15

$$(5) \qquad \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}\frac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]} + \mathfrak{b}\frac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}{\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]} + \mathfrak{c}\frac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}$$

und daher

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}\,\mathfrak{b}_i\,, \\ \mathfrak{b}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}{\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}\,\mathfrak{b}_i\,, \\ \mathfrak{c}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{a}_i[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}\,\mathfrak{b}_i\,. \end{cases}$$

Die durch die vektoranalytische Darstellung der linearen Vektorfunktionen eingeführten Dyaden stellen zwei neue Gebilde zweier gegebener Vektoren dar, die nicht weniger einer allgemeinen Behandlung fähig sind, wie die früher abgeleiteten Gebilde, das skalare und das vektorielle Produkt. Es lassen sich auch für die Dyaden selbständige, einfache Rechnungsregeln ableiten, die den Additions- und Multiplikationsregeln der Vektoren und vielfachen Produkte analog sind. Gerade dadurch bietet die vektoranalytische Darstellung der Vektorfunktionen Vorteile und Nutzen.

§ 53. Benutzung der Dyaden bei den dreifachen Vektorprodukten.

Die Einführung der Dyaden in den linearen Vektorfunktionen wurde dadurch nahegelegt, daß die dreifachen Vektorprodukte:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}) \quad \text{und} \quad [\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]]$$

keine Transformation in eine Form gestatten, die den variablen Vektor $\mathfrak{r}$ explizite, nämlich multipliziert

mit einer bekannten Form der beiden gegebenen Vektoren, enthält. Mit Benutzung der dyadischen Gebilde ist dagegen jedes Produkt dreier Vektoren, unter denen ein variabler Vektor sich befindet, zurückführbar auf eine Kombination eines bekannten Gebildes der beiden gegebenen Vektoren mit dem variabeln. In einem dreifachen Produkt können nämlich die beiden konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nur in den folgenden Kombinationen vorkommen:

1. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ als skalares Produkt in $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{r}$
2. $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ als vektorielles Produkt in $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}$ und $[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}]$
3. $\left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\end{matrix}\right\}$ als skalare Dyade in $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{r})$ oder $(\mathfrak{r}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}$
4. $\left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}\end{matrix}\right\}$ in $\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]$ oder $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{a}$
5. $\left.\begin{matrix}[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}]\end{matrix}\right\}$ als rotorische Dyade in $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]]$ oder $[[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}]$,

wobei die Verbindung (4) sich unter (2) einordnen läßt, da

$$\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}] = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}$$

ist.

Zur Angabe der Dyaden ist es notwendig, die Richtung der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und das Produkt der absoluten Beträge zu kennen. Dadurch sind auch immer die beiden ersten Kombinationen, das skalare und das vektorielle Produkt, mitbestimmt. Man bezeichnet dieselben in der Dyadenrechnung als ersten Skalar resp. ersten Rotor der Dyade.

Die skalare Dyade wollen wir mit Jaumann, der zu der systematischen Ausgestaltung der Dyadenrechnung bemerkenswerte Beiträge geliefert hat, in der Schreibweise durch einen oben angefügten Index s, die rotorische Dyade durch den Index r kennzeichnen, wenn in

den folgenden Entwicklungen beide Arten benutzt werden[1]). Es ist also, wenn wir für ein einzelnes dyadisches Glied den Buchstaben A benutzen,

$$A^s = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cdot = \mathfrak{a}\,;\,\mathfrak{b}$$

$$A^r = [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \times = \mathfrak{a}\,\overset{\times}{,}\,\mathfrak{b}\,.$$

Der erste Skalar der Dyade, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, wird bezeichnet durch A^s_s oder als eine von der rotorischen Dyade abgeleitete Form $-\frac{1}{2} A^r_s$, so daß

$$A^s_s = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$$

$$A^r_s = -2\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,.$$

Der erste Rotor der Dyade, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, wird bezeichnet durch A^s_r resp. $-A^r_r$, also

$$A^s_r = -A^r_r = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,.$$

§ 54. Verbindungen der Dyaden mit Vektoren und Dyaden.

α) Das skalare Produkt eines Vektors $\mathfrak{c}$ mit einem der Vektoren der skalaren Dyade A^s oder $\mathfrak{a}\,;\,\mathfrak{b}$ ergibt das Tripelprodukt (3) in § 53, und zwar ist

$$(1) \qquad A^s \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,,$$

$$(2) \qquad \mathfrak{c} \cdot A^s = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\,,$$

woraus folgt:

$$(3) \qquad A^s \cdot \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \cdot A^s = [\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]\,.$$

β) Das vektorielle Produkt eines Vektors $\mathfrak{c}$ mit einem der Vektoren der skalaren Dyade A^s ergibt eine

[1]) Der Einfachheit halber ist, wenn die rotorische Dyade nicht in die Rechnung eintritt, der Index bei der skalaren Dyade fortgelassen.

neue Dyade, indem das Vektorprodukt zu dem einen Vektor der neuen Dyade verschmilzt:

$$[A^s\,\mathfrak{c}] = \mathfrak{a};\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,, \tag{4}$$

$$[\mathfrak{c}\,A^s] = [\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}];\,\mathfrak{b}\,. \tag{5}$$

γ) Das skalare Produkt eines Vektors $\mathfrak{c}$ mit einem der Vektoren der rotorischen Dyade A^r löst die Dyade in einen sinnlosen Ausdruck auf.

δ) Das vektorielle Produkt eines Vektors $\mathfrak{c}$ mit einem der Vektoren der rotorischen Dyade A^r führt zu einer Zweideutigkeit. Entweder ist das Ergebnis die Vervollständigung des Tripelproduktes (5) oder eine neue rotorische Dyade. Da es ein skalares Produkt nicht gibt, so nennt man zur Unterscheidung der beiden Fälle das erste Produkt (analog Fall α) ein skalares Produkt der rotorischen Dyade mit einem Vektor und schreibt:

$$A^r \cdot \mathfrak{c} = [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]\,, \tag{6}$$

$$\mathfrak{c} \cdot A^r = [[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}]\,, \tag{7}$$

woraus folgt:

$$\begin{cases} A^r \cdot \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \cdot A^r = -[\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]] = -A^s \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{c} \cdot A^s \\ A^s \cdot \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \cdot A^r = \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{c} \cdot A^s - A^r \cdot \mathfrak{c} = -\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,. \end{cases} \tag{8}$$

Der zweite Fall wird als vektorielles Produkt bezeichnet und geschrieben:

$$[A^r\,\mathfrak{c}] = \mathfrak{a} \times [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,, \tag{9}$$

$$[\mathfrak{c}\,A^r] = [\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] \times \mathfrak{b}\,. \tag{10}$$

Hat man es mit Produkten von mehr als drei Vektoren zu tun, so können in diesen außer den besprochenen

Verbindungen auch zwei Dyaden nebeneinander vorkommen. In einigen Fällen der verschiedenen Kombinationen läßt sich die Verbindung (oder das Produkt) der Dyaden auf bekannte Formen zurückführen, in einigen Fällen stellen die Produkte solche Verbindungen her, die mit der bloßen Kenntnis der Vektoren- und Dyadenform nur als unvollständige Gebilde erkannt werden können, in gleicher Weise wie die Dyaden in der reinen Vektorenlehre unvollständige Gebilde sind; diese Formen führen daher auf neue selbständige Operatoren, die man Triaden nennt. Die anderen Fälle der Dyadenverbindungen sind sinnlos.

ε) Unter dem skalaren Produkt zweier skalarer Dyaden:

$$(\mathfrak{a}; \mathfrak{b})\,(\mathfrak{c}; \mathfrak{d}), \tag{11}$$

welches z. B. in dem vielfachen Vektorprodukt vorkommt,

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{B}),$$

oder in

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{d},$$

kann nur die durch die Klammern angegebene Operation verstanden werden. Es folgt daraus sofort, daß das skalare Produkt zweier skalarer Dyaden wieder eine skalare Dyade ist, die aus den beiden äußeren der vier Vektoren des Dyadenproduktes gebildet ist, indem die inneren zu einer skalaren Größe verschmelzen.

ζ) Das vektorielle Produkt zweier skalarer Dyaden

$$(\mathfrak{a}; \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c}; \mathfrak{d}) \tag{12}$$

etwa in

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{B})$$

oder in

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{d}$$

kann entweder wie in dem letzteren Fall auf den ersten oder vierten mit dem skalaren Tripelprodukt der drei anderen multiplizierten Vektor reduziert werden, ein Umstand, der es erlaubt, von vornherein das Produkt einfacher zu schreiben, oder es führt auf ein neues selbständiges Gebilde, die Triade, welche aus drei nebeneinanderstehenden Vektoren

$$\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{d} \tag{13}$$

besteht, von denen der erste und dritte mit anderen Vektoren in Verbindung treten. Zur Vermeidung von Zweideutigkeiten müssen also vektorielle Produkte zweier skalarer Dyaden genauer definiert sein, als durch die angeschriebene Form (12).

η) Das skalare Produkt zweier rotorischer Dyaden ist eine unmögliche Verbindung, man könnte aber mit etwas veränderter Begriffsbildung unter einem solchen Produkt die Form

$$[\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{d}] \tag{14}$$

verstehen, welche sich also auf einen Vektor zurückführen ließe.

ϑ) Das vektorielle Produkt zweier rotorischer Dyaden führt entweder auf eine Triade

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{d}]\,,$$

oder auf ein noch höheres Gebilde

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,[\mathfrak{d}\,,$$

oder auf eine rotorische Dyade, oder endlich auf einen Vektor, je nach der zu der eindeutigen Bestimmung not-

wendigerweise anzugebenden Assoziation und den weiteren Verbindungen.

i) Produkte rotorischer und skalarer Dyaden haben keine Realität.

§ 55. Reduktion der Dyadensummen auf ein und zwei Glieder.

Aus der Ableitung der Dyaden geht hervor, daß, wenn mehrere Dyaden mit einem und demselben Vektor multipliziert werden sollen, dieselben sich in eine Dyadensumme zusammenfassen lassen, d. h. vor der Multiplikation summiert werden können. Auch bei der Multiplikation der Dyadensummen gilt das distributive Gesetz. Nur muß auf die Reihenfolge der Vektoren geachtet werden.

Hieraus und aus den Sätzen des vorigen Paragraphen ist zu folgern, daß, wenn Φ, Ψ und Ω skalare Dyadensummen vorstellen, wir schreiben können:

$$\Phi \cdot \Psi = \Psi \cdot \Phi \tag{1}$$

$$(\Phi \cdot \Psi)\,\Omega = \Phi\,(\Psi\,\Omega)\,.$$

Die Gleichung (1) erlaubt eine einfache geometrische Interpretation. Es mag der Vektor $\mathfrak{r}$ die Lage eines Punktes im Raum gegen ein gegebenes Achsensystem angeben. Nehmen wir eine Koordinatentransformation im Raum vor, wählen wir z. B. als neue Koordinaten:

$$r'_1 = r_1 A_1 + r_2 B_1 + r_3 C_1\,,$$

$$r'_2 = r_1 A_2 + r_2 B_2 + r_3 C_2\,,$$

$$r'_3 = r_1 A_3 + r_2 B_3 + r_3 C_3\,,$$

so ist die Lage desselben Punktes im neuen Achsen-

system, welches den gleichen Anfangspunkt besitzt, durch die homogene, lineare Vektorfunktion

$$\mathfrak{r}' = \Phi \cdot \mathfrak{r} \tag{2}$$

gegeben, wenn

$$\mathfrak{r}' = r_1' \mathfrak{i} + r_2' \mathfrak{j} + r_3' \mathfrak{k},$$
$$\mathfrak{r} = r_1 \mathfrak{i} + r_2 \mathfrak{j} + r_3 \mathfrak{k}$$

und Φ aus Gleichung (8′) in § 50 folgt, oder, analog der Gleichung (4) in § 51 geschrieben, die Form hat:

$$\Phi = A_1, A_2, A_3,$$
$$B_1, B_2, B_3,$$
$$C_1, C_2, C_3.$$

Einer neuen Koordinatentransformation mag die Gleichung:

$$\mathfrak{r}'' = \Psi \cdot \mathfrak{r}' \tag{3}$$

entsprechen. Dann sagt die Gleichung (1) aus, daß die Reihenfolge der Transformationen keinen Einfluß auf das Resultat hat. In einem Ausdruck von der Form $(\Phi \cdot \Psi) \cdot \mathfrak{r}$ oder $(\Phi \cdot \Psi)\, \Omega \cdot \mathfrak{r}$ können daher die Klammern unbeschadet fortbleiben.

Dagegen haben die beiden Ausdrücke:

$$(\Phi \cdot \mathfrak{r})\, \Psi \quad \text{und} \quad \Phi \cdot (\mathfrak{r}\, \Psi)$$

ganz verschiedene Werte.

Endlich sei hier die Formel angeschrieben:

$$\Phi \cdot [\mathfrak{r}\, \Psi] = [\Phi\, \mathfrak{r}] \cdot \Psi, \tag{4}$$

welche sich daraus ergibt, daß das skalare Produkt zweier skalarer Dyaden wieder eine skalare Dyade ist, die aus den außenstehenden Vektoren gebildet wird; das Produkt der inneren Vektoren gehorcht aber der Gleichung:

$$\mathfrak{b}\, [\mathfrak{r}\, \mathfrak{c}] = [\mathfrak{b}\, \mathfrak{r}]\, \mathfrak{c}.$$

Jede Summe von skalaren resp. rotorischen Dyaden läßt sich, wie wir oben sahen, in eine komplette verwandeln, bestehend aus der Summe dreier einfacher Dyaden. Unter gewissen Umständen läßt sich nun die komplette Dyade auf die Summe zweier, oder gar auf eine einzige Dyade reduzieren.

In der kompletten skalaren Dyade

$$\Phi^s = (\mathfrak{a}; \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}; \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}; \mathfrak{c}') \tag{5}$$

seien die Antezedenten drei willkürlich gegebene, nicht komplanare Vektoren, aus welchen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nach den Gleichungen (6) des § 52 berechnet sein mögen.

Durch Multiplikation der Dyade mit einem Vektor $\mathfrak{r}$ erhalten wir den Vektor

$$\Phi^s \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}'\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{b}'\mathfrak{r}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{c}'\mathfrak{r}) . \tag{6}$$

Die Forderung der Reduktion des Ausdruckes (5) auf zwei Glieder ist gleichbedeutend mit der Forderung der gleichen Reduktion von (6) bei beliebigem Vektor $\mathfrak{r}$. Letzteres können wir immer dann und nur dann ausführen, wenn sich einer der Klammerausdrücke durch die beiden anderen durch Multiplikation mit skalaren Größen darstellen läßt, d. h. wenn für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{r}$

$$A(\mathfrak{a}'\mathfrak{r}) + B(\mathfrak{b}'\mathfrak{r}) = (\mathfrak{c}'\mathfrak{r})$$

ist. Diese Gleichung ist nur möglich, wenn

$$A\mathfrak{a}' + B\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}',$$

d. h. wenn die Konsequenten komplanare Vektoren sind. Dann geht der Ausdruck (5) über in:

$$\Phi^s = ((\mathfrak{a} + A\mathfrak{c}); \mathfrak{a}' + (\mathfrak{b} + B\mathfrak{c}); \mathfrak{b}) .$$

Sind dagegen die Konsequenten als drei nicht kompla-

nare Vektoren gegeben, so läßt sich die rechte Seite von (6) immer nur dann in die Summe zweier Glieder zusammenziehen, wenn die eine der drei Antezedenten sich durch die anderen beiden darstellen läßt, also die Antezedenten komplanar sind. Dann kann man schreiben:

$$\Phi^s = (\mathfrak{a}; (\mathfrak{a}' + A'\mathfrak{c}') + \mathfrak{b}; (\mathfrak{b}' + B'\mathfrak{c}')),$$

indem die willkürliche Wahl der Konsequenten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ für die Antezedenten die Vektoren

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = A'\mathfrak{a} + B'\mathfrak{b}$$

ergeben muß.

Genau dieselbe Betrachtung gilt mutatis mutandis für die rotorischen Dyaden.

In analoger Weise ist zu zeigen, daß sich die skalare oder rotorische Dyade auf ein einziges Glied reduziert, wenn bei beliebig vorgegebener Wahl der nicht komplanaren Antezedenten (oder Konsequenten) die Konsequenten (resp. Antezedenten) kollinear sind.

§ 56. Normalform der kompletten Dyade.

Eine jede komplette Dyade läßt sich durch zwei Gruppen von je drei zueinander senkrechten Vektoren darstellen.

Die lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}' = \Phi \cdot \mathfrak{r}$ stellt den Radiusvektor eines Ellipsoides dar, wenn $\mathfrak{r}$ einen Einheitsvektor bedeutet. Wir wählen als Antezedenten der Dyade Φ die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, die mit den drei aufeinander senkrecht stehenden Hauptachsen der Richtung und Größe nach zusammenfallen; nun sagt ein Satz der analytischen Geometrie aus, daß eine lineare Koordinatentransformation eine Kugelfläche in ein Ellipsoid überführt, derart, daß die drei aufeinander senkrecht stehenden Hauptachsen-

richtungen des Ellipsoides aus drei aufeinander senkrechten Kugelradien entstehen. Es entsprechen hiernach den Werten:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{c}$$

Werte von $\mathfrak{r}$, die ebenfalls aufeinander senkrecht stehen, und die wir mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ bezeichnen wollen; soll aber

$$\mathfrak{r}' = \Phi \cdot \bar{\mathfrak{r}}$$

für $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ in die Antezedenten der Dyade übergehen, so müssen die Konsequenten die Werte $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ haben. Also läßt sich in jedem Fall eine Dyade in die Form bringen:

$$\Phi = \mathfrak{a}; \mathfrak{i} + \mathfrak{b}; \mathfrak{j} + \mathfrak{c}; \mathfrak{k}, \tag{1}$$

in welcher $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ zwei Gruppen von drei zueinander senkrechten Vektoren sind.

Umgekehrt läßt sich aus den Rechnungsregeln der Dyaden und Vektoren der Satz der analytischen Geometrie ableiten. Zu dem Zweck wählen wir den transformierten Vektor $\mathfrak{r}'$, der den größten absoluten Betrag hat, zu der ersten Antezedente $\mathfrak{a}$, den dazugehörigen Vektor $\bar{\mathfrak{r}}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}$. Zur zweiten Antezedente $\mathfrak{b}$ wählen wir den Vektor $\mathfrak{r}'$, welcher von allen Vektoren, deren zugehörige Vektoren $\bar{\mathfrak{r}}$ senkrecht zu $\mathfrak{i}$ stehen, den größten absoluten Betrag hat, den zugehörigen Vektor $\bar{\mathfrak{r}}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{j}$; die dritte Antezedente $\mathfrak{c}$ sei der Vektor $\mathfrak{r}'$, welcher von dem zu $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{i}$ senkrechten Vektor $\mathfrak{k}$ abgeleitet wird.

In dem Punkt, in dem $\mathfrak{r}'$ ein Maximum ist, müssen $\mathfrak{r}'$ und $d\mathfrak{r}'$ senkrecht zueinander stehen, also

$$\mathfrak{r}' \cdot d\mathfrak{r}' \equiv \mathfrak{r}' \cdot (\mathfrak{a}; \mathfrak{i} + \mathfrak{b}; \mathfrak{j} + \mathfrak{c}; \mathfrak{k}) \cdot d\bar{\mathfrak{r}} = 0. \tag{2}$$

In diesem Fall nimmt $\mathfrak{r}'$ den Wert $\mathfrak{a}$ an, während $d\bar{\mathfrak{r}}$ senkrecht zu $\bar{\mathfrak{r}}$, also in diesem Fall zu $\mathfrak{i}$ steht, so daß das skalare Produkt (2) sich reduziert auf:

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}\, b_1 + \mathfrak{c}\, c_1) = 0 ,$$

wenn $\mathfrak{j} \cdot d\bar{\mathfrak{r}} = b_1$ und $\mathfrak{k} \cdot d\bar{\mathfrak{r}} = c_1$ gesetzt wird. Also ist $\mathfrak{a}$ senkrecht zu der Ebene der Vektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. In dieser Ebene ist nun wieder $\mathfrak{b}$ der Maximalwert von $\mathfrak{r}'$, also längs der Schnittlinie des Ellipsoides mit der Ebene gilt:

$$\mathfrak{r}' d\mathfrak{r}' \equiv \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} \cdot c_2 = 0 ,$$

wenn man bedenkt, daß $d\bar{\mathfrak{r}}$ wieder senkrecht zu $\bar{\mathfrak{r}}$, in diesem Falle also zu $\mathfrak{j}$ steht, und man $d\bar{\mathfrak{r}} \cdot \mathfrak{k} = c_2$ setzt. Hieraus folgt, daß auch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zueinander senkrecht stehen.

Die Darstellung der Dyade durch zwei Gruppen von drei zueinander senkrecht stehenden Vektoren nennt man die Darstellung durch die Normalform, und zwar nennt man:

(3) $$\Phi^s = (a\,\mathfrak{i}'; \mathfrak{i} + b\,\mathfrak{j}'; \mathfrak{j} + c\,\mathfrak{k}'; \mathfrak{k})$$

die Normalform der skalaren,

(4) $$\Phi^v = (a\,\mathfrak{i}',^{\times}\mathfrak{i} + b\,\mathfrak{j}',^{\times}\mathfrak{j} + c\,\mathfrak{k}',^{\times}\mathfrak{k})$$

die Normalform der rotorischen Dyade.

Von Bedeutung ist der spezielle Fall, daß in der Normalform

$$a = b = c = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}, \mathfrak{j}' = \mathfrak{j}, \mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$$

ist. Man spricht dann von einer Einheits- oder Identitätsdyade

(5) $$J = (\mathfrak{i}; \mathfrak{i} + \mathfrak{j}; \mathfrak{j} + \mathfrak{k}; \mathfrak{k}) ,$$

in welche Φ^s übergeht. Φ^v geht über in:

$$[\mathfrak{i}[\mathfrak{i} + [\mathfrak{j}[\mathfrak{j} + [\mathfrak{k}[\mathfrak{k} = (\mathfrak{i},^{\times}\mathfrak{i} + \mathfrak{j},^{\times}\mathfrak{j} + \mathfrak{k},^{\times}\mathfrak{k}) .$$

Statt dessen können wir schreiben:

$$(5') \quad (\mathfrak{i};\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}+\mathfrak{j};\mathfrak{j}\times\mathfrak{i}+\mathfrak{k};\mathfrak{k}\times\mathfrak{i}) = -2J = -2(\mathfrak{i};\mathfrak{i}+\mathfrak{j};\mathfrak{j}+\mathfrak{k};\mathfrak{k}).$$

Wegen der Beziehung

$$\mathfrak{j};\mathfrak{j}+\mathfrak{k};\mathfrak{k} = -\mathfrak{i};\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}$$

können wir die Identitätsdyade auch in die Form bringen:

$$(5'') \quad J = \mathfrak{i};\mathfrak{i} - \mathfrak{i};\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}.$$

Die Anwendung der Identitätsdyade auf einen Vektor führt denselben in sich über:

$$(6) \quad \mathfrak{r} = J\cdot\mathfrak{r};$$

ebenso gilt:

$$\Phi = \Phi\cdot J = J\cdot\Phi.$$

Der erste Skalar der Einheitsdyade J hat den Wert 3.

Das skalare Produkt zweier skalarer Dyaden ist nach § 54 wieder eine skalare Dyade, es muß also möglich sein, bei gegebenem Wert von Φ die Gleichung zu erfüllen:

$$\Phi\cdot\Psi = J.$$

Dieselbe fordert, wenn wir uns wie oben unter der Anwendung von Φ und Ψ auf den Vektor $\mathfrak{r}$ eine Koordinatentransformation vorstellen, daß die Transformation Φ durch die Transformation Ψ gerade aufgehoben wird, d. h. wenn

$$\mathfrak{r}' = \Phi\cdot\mathfrak{r},$$

so muß

$$\Psi\cdot\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$$

sein. Es bedeutet also Ψ die lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}$ des Vektors $\mathfrak{r}'$, wenn Φ die lineare Vektorfunktion $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ ist. Ψ gibt die Auflösung der Transformationsgleichungen, welche $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ überführen, nach $\mathfrak{r}$. Man nennt Ψ die reziproke Dyade und bezeichnet sie auch symbolisch durch Φ^{-1}.

§ 57. Spezielle Dyadenformen.

Es seien hier noch einige Bezeichnungen gewisser Formen von Dyaden angeführt.

Man nennt Φ_c eine konjugierte Dyade der Dyade Φ, wenn sie durch Vertauschung der Antezedenten und Konsequenten in Φ gewonnen ist; es ist offenbar

$$\mathfrak{r} \cdot \Phi_c = \Phi \cdot \mathfrak{r} .$$

Die beiden Dyaden sind einander gleich, wenn Φ die Form hat (vgl. § 50):

$$\Phi = \begin{matrix} a_1 , a_2 , a_3 \\ a_2 , b_2 , b_3 \\ a_3 , b_3 , c_3 \end{matrix} .$$

Man nennt eine solche Dyade symmetrisch oder autokonjugiert; durch die Angabe, daß eine Dyade symmetrisch sein soll, sind drei Beziehungen zwischen den Koeffizienten gegeben, so daß nur noch sechs unabhängige Bestimmungsstücke bleiben. Sind die beiden Dyaden entgegengesetzt einander gleich, also

$$\Phi = -\Phi_c = \begin{matrix} 0 , & a_2 , & a_3 , \\ -a_2 , & 0 , & b_3 , \\ -a_3 , & -b_3 , & 0 , \end{matrix}$$

so spricht man von einer antisymmetrischen Dyade.

Jede Dyade Φ kann in zwei additive Teile zerlegt werden, deren einer eine symmetrische und deren anderer eine antisymmetrische Dyade ist, indem die Identität besteht:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(\Phi + \Phi_c) + \tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi_c) ,$$

worin übrigens, wenn

$$\Phi = \mathfrak{a}; \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}; \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}; \mathfrak{c}'$$

und daher

$$\Phi - \Phi_c = \mathfrak{a}; \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}; \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}; \mathfrak{c}' - \mathfrak{a}'; \mathfrak{a} - \mathfrak{b}'; \mathfrak{b} - \mathfrak{c}'; \mathfrak{c}$$

ist, wegen:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}'\mathfrak{r}) - \mathfrak{a}'(\mathfrak{a}\mathfrak{r}) = [[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}']\,\mathfrak{r}]$$

für $\frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$ auch

$$\tfrac{1}{2}([\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'] + [\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}'] + [\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}']) \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\Phi_r$$

gesetzt werden kann.

$\frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$ bezeichnet man als symmetrische Dyade erster Art, geschrieben $[\Phi]$, so daß

$$\Phi = [\Phi] + \tfrac{1}{2}\Phi_r .$$

Die symmetrische Dyade zweiter Art: $\{\Phi\}$ definiert man durch das Produkt der Dyade in die konjugierte, indem man schreibt:

$$\{\Phi\}^2 = \Phi \cdot \Phi_c .$$

§ 58. Anwendung auf die unendlich kleinen Verrückungen kontinuierlich verbreiteter Massen.

Die unendlich kleinen relativen Verrückungen der irgendwelchen Kräften unterworfenen Punkte eines kontinuierlich verteilten Mediums gegen einen in der Masse liegenden Anfangspunkt, die durch eine lineare Vektorfunktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ darstellbar sind, seien für die Punkte mit der Entfernung r vom Anfangspunkt durch:

$$\mathfrak{v}_1 = \Phi_1 \cdot \mathfrak{r} \tag{1}$$

gegeben, so daß die Entfernung der Punkte vom Anfangspunkt am Ende der Verrückung:

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{r} + \Phi_1 \cdot \mathfrak{r}$$

ist. Wir erteilen dem so definierten Bereich eine neue Deformation, deren Dyade mit Φ_2 bezeichnet sei. Die Koordinaten der Punkte nach dieser zweiten Verrückung sind dann

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 (\mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r}) + \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{r},$$

oder also

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 (\mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r}) + \Phi_1 \mathfrak{r}. \tag{2}$$

Da die Verrückungen unendlich klein sein sollen, dürfen wir $\Phi_2 \Phi_1 \mathfrak{r}$ gegen die anderen Ausdrücke vernachlässigen, und Gleichung (2) oder

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 \mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r} \tag{2'}$$

stellt die für die unendlich kleinen Verrückungen wichtige Eigenschaft der Superposition mehrerer unendlich kleiner Verrückungen dar.

Die verhältnismäßige Vergrößerung der Entfernung $\mathfrak{r}$ durch die Deformation (1), d. i. die Projektion der Verrückung $\mathfrak{v}$ in die Richtung $\bar{\mathfrak{r}}$ bezogen auf die Längeneinheit $\bar{\mathfrak{r}}$, erhalten wir, wenn wir den Ausdruck (1) mit $\mathfrak{r}$ skalar multiplizieren, wodurch beiderseits eine skalare Größe entsteht, und durch $\mathfrak{r}^2$ dividieren; wir erhalten:

$$\frac{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2} = \frac{\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2}. \tag{3}$$

Nun ist:

$$\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \Phi_c \cdot \mathfrak{r},$$

da die einschließenden Vektoren einander gleich sind, also

$$\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \tfrac{1}{2} (\Phi + \Phi_c) \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = [\Phi] \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}.$$

Die Streckung bei einer unendlich kleinen, allgemeinen Deformation ist also durch die symmetrische Dyade erster Art gegeben.

Die Zerlegung der Dyade Φ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil gewinnt in dem betrachteten Fall eine besondere physikalische Bedeutung. Die Änderung der Entfernung hängt von dem symmetrischen Teil ab. Ist also die Deformation von solcher Art, daß dieser Teil Null wird, so tritt keine Volumenveränderung bei der Deformation ein, d. h. es bewegt sich das Medium wie ein starrer Körper. Daraus folgt weiter, daß der zweite, antisymmetrische Teil der Dyade einer Drehung des Mediums um den Punkt, gegen welchen die Verrückungen betrachtet werden, entspricht. In der Tat nimmt dieser zweite Teil die Form an:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c) = \frac{1}{2}\{0\,,\ a_2 - b_1\,,\ c_1 - a_3 \\ \qquad\qquad b_1 - a_2\,,\ 0\,,\ b_3 - c_2 \\ \qquad\qquad a_3 - c_1\,,\ c_2 - b_3\,,\ 0\} \\ \qquad = \dfrac{1}{2}\left\{0\,,\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x},\ \dfrac{\partial\xi}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right., \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y},\ 0\,,\ \dfrac{\partial\eta}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}, \\ \qquad\qquad \left.\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z},\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial z},\ 0\right\}, \end{cases}$$

wenn wir für die Koeffizienten der Deformation die Bezeichnungsweise des § 51 wählen. Für die Deformation, die dieser Dyade entspricht, folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)\cdot\mathfrak{r} = \left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)[\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}] \\ \quad + \left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial z}\right)[\mathfrak{j}\,\mathfrak{r}] + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)[\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}] = [\operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}]\,. \end{cases}$$

Erleidet der Punkt, auf den diese Verrückungen bezogen sind, selbst eine unendlich kleine Verrückung, so müssen wir, um die absoluten Verrückungen zu erhalten, diese hinzuaddieren. Es lehrt dies, daß eine jede unendlich kleine Verrückung zusammengesetzt gedacht werden kann aus:

1. einer Parallelverschiebung des Mediums,
2. einer Volumendilatation, deren Größe durch den symmetrischen Teil der Dyade gegeben ist, welche die lineare Vektorfunktion der Verrückung nach Abzug der Parallelverschiebung bestimmt,
3. einer Drehung des Mediums um den Bezugspunkt, deren Größe und Richtung durch den antisymmetrischen Teil der Dyade angegeben ist.

§ 59. Hauptdilatationsachsen. Reine Volumendilatation.

Aus der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen, welche die Dilatation in einer vorgegebenen Richtung bestimmt, können wir die Hauptdilatationsachsen ableiten, d. h. die Richtungen, in denen die Dilatation einen Grenzwert, Maximum, Minimum oder Sattelwert, annimmt. Nachdem wir oben gezeigt haben, daß die Deformation eine Kugelfläche in ein Ellipsoid verwandelt, ergibt sich von selbst, daß die Hauptdilatationsachsen mit den Achsen des Ellipsoides zusammenfallen müssen. Es ist indessen nicht überflüssig, zur Übung die Hauptdilatationsrichtungen direkt zu berechnen und gleichzeitig zu zeigen, daß in diesen Richtungen nur Streckung, aber keine Richtungsänderung der Radienvektoren vorkommen. Für einen Grenzwert muß die Variation der verhältnismäßigen

Streckung der Richtung $\bar{\tau}$ Null sein. Bei der Variation des Ausdruckes:

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{v} \cdot \tau}{\tau^2} = \frac{[\Phi] \cdot \tau \cdot \tau}{\tau^2} = [\Phi] \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{\tau}$$

müssen wir nun berücksichtigen, daß für den Einheitsvektor $\bar{\tau}$ die Beziehung gilt:

$$(2) \qquad \bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} = 0 .$$

Nun ist

$$d\{[\Phi]\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}\} = [\Phi] d\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} + [\Phi]\bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} ,$$

oder da die Dyade symmetrisch ist und daher:

$$[\Phi] d\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} \equiv \bar{\tau} \cdot [\Phi] \cdot d\bar{\tau} = d\bar{\tau} \cdot [\Phi] \cdot \bar{\tau} \equiv [\Phi]\bar{\tau} \cdot d\bar{\tau}$$

gesetzt werden kann, folgt:

$$d\{[\Phi]\bar{\tau} \cdot \bar{\tau}\} = 2[\Phi]\bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} .$$

Subtrahieren wir von diesem Ausdruck, den wir gleich Null zu setzen haben, die mit einem willkürlichen, skalaren Faktor λ multiplizierte Gleichung (2), welche wir mit Benutzung der Identitätsdyade J auch schreiben können:

$$\lambda J \cdot \bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} = 0 ,$$

so kommt:

$$(3) \qquad ([\Phi] - \lambda J) \cdot \bar{\tau} \cdot d\bar{\tau} = 0 .$$

Diese Gleichung muß für jeden Wert von $d\bar{\tau}$ gelten, speziell also auch, wenn $d\bar{\tau}$ mit der Richtung des Vektors

$$([\Phi] - \lambda J) \cdot \bar{\tau}$$

zusammenfällt; es muß also der Vektor selbst Null sein. Dieser Forderung aber sind drei skalare Gleichungen für die drei Komponenten äquivalent und diese sind bezüglich der Komponenten r_1, r_2, r_3 des Vektors $\bar{\tau}$ homogen und linear.

Solche Gleichungen können nur zusammen bestehen, wenn die Determinante der Dyade $([\Phi] - \lambda J)$, d. i. die aus den Dyadenkoeffizienten gebildete Determinante verschwindet. Diese Bedingung ergibt eine Gleichung dritten Grades in λ, welche drei reelle Lösungen besitzt. Jeder Lösung λ entspricht ein Wertsystem der Komponenten r_1, r_2, r_3 von $\bar{\mathfrak{r}}$. Die drei daraus folgenden Richtungen seien $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \mathfrak{r}'''$. Dieselben stehen aufeinander senkrecht, wie aus Gleichung (3) leicht festgestellt werden kann. Für λ_1 und $\mathfrak{r}'$ geht nämlich die von $d\bar{\mathfrak{r}}$ befreite Gleichung (3) über in:

$$([\Phi] - \lambda_1 J)\,\bar{\mathfrak{r}}' = 0\,, \tag{4}$$

für λ_2 und $\mathfrak{r}''$ in:

$$([\Phi] - \lambda_2 J)\,\bar{\mathfrak{r}}'' = 0\,. \tag{4'}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung skalar mit $\bar{\mathfrak{r}}''$, die zweite mit $\bar{\mathfrak{r}}'$ und subtrahieren die zweite von der ersten. Dann erhalten wir:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\bar{\mathfrak{r}}'\,\bar{\mathfrak{r}}'' = 0\,.$$

Wenn also λ_1 und λ_2 nicht gleich sind, müssen $\bar{\mathfrak{r}}'$ und $\bar{\mathfrak{r}}''$ aufeinander senkrecht stehen; dasselbe gilt von der Kombination $\bar{\mathfrak{r}}'''$, $\bar{\mathfrak{r}}'$ und $\bar{\mathfrak{r}}'''$, $\bar{\mathfrak{r}}''$, wenn auch λ_3 von λ_1 und λ_2 verschieden ist.

Es existieren in diesem Fall drei zueinander senkrechte Richtungen, in denen die Dilatation einen Grenzwert annimmt. Es sind diese drei Richtungen also die Hauptachsen des durch die Deformationsdyade Φ bestimmten Ellipsoides.

Die Größe der Dilatation in den drei Richtungen erhalten wir aus den Gleichungen (4), (4') und der entsprechenden für λ_3, da $[\Phi]\,\mathfrak{r}$ der Teil der Deformation ist, der sich auf die Dehnung bezieht. Es wird

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r'}\,\mathfrak{v}_1 = [\Phi]\,\mathfrak{r}' = \lambda_1\,\mathfrak{r}' \\ \frac{1}{r''}\,\mathfrak{v}_2 = \lambda_2\,\mathfrak{r}'' \\ \frac{1}{r'''}\,\mathfrak{v}_3 = \lambda_3\,\mathfrak{r}'''. \end{cases}$$

Es folgt hieraus, daß in den Hauptdilatationsrichtungen die Deformation $[\Phi]$ nur Verlängerungen, nicht Richtungsänderungen des Vektors $\mathfrak{r}$ bewirkt.

Die Dilatation des Volumens der Einheitskugel bei der Deformation in das Ellipsoid mit den Halbachsen: $1+\lambda_1, 1+\lambda_2, 1+\lambda_3$ pro Volumeneinheit, schlechthin die Volumendilatation genannt, ist, da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ klein gegen 1 sind, gleich $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. Dieselbe ist gleich der Summe der Diagonalglieder der Dyade Φ, oder der Dyade $[\Phi]$, da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Lösungen der Gleichung dritten Grades waren, die wir erhielten, wenn wir die aus den gleichen Gliedern wie die Dyade $([\Phi]-\lambda J)$ bestehende Determinante gleich Null setzten. Die Volumendilatation ist also Null, wenn $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ oder

$$(6)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

ist, eine Gleichung, die wir aus der Hydrodynamik als Inkompressibilitätsbedingung kennen. Einer Dyade mit dieser Bedingung entspricht eine reine Gestaltsänderung.

Wenn die Gestalt nach der Deformation sich ähnlich geblieben sein soll, so müssen die Dilatationen nach allen Richtungen gleichgroß sein, d. h. die drei Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einander gleich sein. Die Bedingungen, welche in diesem

Fall zwischen den Koeffizienten der Deformationsdyade bestehen müssen, finden wir auf folgendem Wege. Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so geht die lineare Vektorfunktion

$$\begin{aligned}\mathfrak{v} = [\Phi]\,\mathfrak{r} &= A\,\mathfrak{v}_1 + B\,\mathfrak{v}_2 + C\,\mathfrak{v}_3 \\ &= A\,\lambda_1\,\mathfrak{r}' + B\,\lambda_2\,\mathfrak{r}'' + C\,\lambda_3\,\mathfrak{r}''',\end{aligned}$$

welche der allgemeinen Dilatation entspricht für den Vektor

$$\mathfrak{r} = A\,\mathfrak{r}' + B\,\mathfrak{r}'' + C\,\mathfrak{r}''',$$

über in:

$$\mathfrak{v} = \lambda_1\,(A\,\mathfrak{r}' + B\,\mathfrak{r}'' + C\,\mathfrak{r}''') = \lambda_1\,\mathfrak{r} = \lambda_1 J \cdot \mathfrak{r}\,.$$

Es muß also für jeden Vektor

$$([\Phi] - \lambda_1 J) \cdot \mathfrak{r} = 0$$

sein, oder

$$[\Phi] = \lambda_1 J\,. \tag{7}$$

Zwei Dyaden sind aber nur gleich, wenn alle Koeffizienten ihrer Normalform einander gleich sind. Die Koeffizienten von J kennen wir und es folgt hieraus:

$$\begin{cases} a_1 = b_2 = c_3 = \lambda\,, \\ c_2 + b_3 = a_3 + c_1 = b_1 + a_2 = 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

Man bezeichnet eine Deformation, deren Koeffizienten diesen Bedingungen genügen, die also eine nach allen Richtungen gleiche Dehnung ohne Änderung der Richtungen hervorruft, eine reine Volumenänderung.

§ 60. Anwendung auf die Differentialoperationen von Vektoren.

Es sei

$$\begin{aligned} d\mathfrak{v} &= \Phi' \cdot d\mathfrak{r}\,, \\ \mathfrak{v} &= \xi\,\mathfrak{i} + \eta\,\mathfrak{j} + \zeta\,\mathfrak{k}\,, \end{aligned}$$

also:

$$\Phi^s = \begin{matrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z}, & \frac{\partial \eta}{\partial z}, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{matrix}.$$

Aus der Gleichung (4) des § 58 ergibt sich dann:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}(\Phi^s - \Phi^s_c) = \tfrac{1}{2}\Phi^s_r .$$

Hieraus ist sofort abzulesen, daß, wenn curl$\mathfrak{v}$ Null ist, die Dyade Φ^s symmetrisch, d. h. die durch Φ^s dargestellte Deformation frei von Drehung ist. Aus Gleichung (6) in § 59 und der Bedeutung von Φ^s_s folgt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \Phi^s_s .$$

In § 51 wurde gezeigt, daß

$$\Phi^s = \mathfrak{v}; \nabla,$$

wobei sich die Differentiation auf den davorstehenden Vektor bezieht, und es ist die totale Änderung des Vektors $\mathfrak{v}$ in der Richtung $\mathfrak{a}$:

$$\Phi^s \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \nabla; \mathfrak{v} = (\mathfrak{a} \nabla) \mathfrak{v} .$$

Die anderen im I. Teil besprochenen Differentialoperationen der Vektoren und der Vektorprodukte lassen sich ebenfalls in übersichtlicher Weise durch die Dyaden ausdrücken, und Jaumann hebt mit Recht hervor, daß durch die Dyaden die Differentialausdrücke sinnvoll zerlegt werden; nämlich in zwei vorstellbare, reale Faktoren, im Gegensatz zu der in obiger Darstellung vorgenommenen Trennung der Differentialoperatoren von den davon berührten Vektoren. Die Formeln sind mühelos abzuleiten, wenn man ∇ wie früher als Zeichen eines gewöhnlichen Vektors behandelt.

Die konjugierte, skalare Dyade ist:

$$\Phi^s_c = \nabla; \mathfrak{v} .$$

Das Produkt dieser Dyade in einen Vektor:

$$\Phi^s_c \mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \mathfrak{v}) \nabla = \nabla (\mathfrak{a} \mathfrak{v})_a$$

bedeutet den Gradienten der skalaren Größe $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v})$ bei konstant gehaltenem Vektor $\mathfrak{a}$; dagegen ist

$$\mathfrak{a}\cdot\Phi_c^s = \mathfrak{v};\ \nabla\mathfrak{a} = (\nabla\mathfrak{a})\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\nabla)\,\mathfrak{v} = \Phi^s\,\mathfrak{a}\,.$$

Die rotorische Dyade nimmt folgenden Wert an:

$$\Phi^r = \mathfrak{v}\overset{\times}{,}\nabla\,.$$

Das Produkt derselben mit einem konstanten Vektor $\mathfrak{a}$:

$$\Phi^r\,\mathfrak{a} = [[\mathfrak{a}\nabla]\,\mathfrak{v}]$$

sei als Beispiel etwas ausführlicher entwickelt. Infolge von

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}] = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

ist

$$\Phi^r\,\mathfrak{a} = \Phi_c^s\,\mathfrak{a} - \Phi_s^s\,\mathfrak{a}\,.$$

Die Komponente der rechten Seite in der Richtung $\mathfrak{i}$ läßt sich sofort hinschreiben:

$$+a_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_3\frac{\partial\zeta}{\partial x} - a_1\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$
$$= -a_1\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + a_2\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_3\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,,$$

wenn

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}$$

gesetzt ist. Links erhalten wir in ausführlicher Schreibweise:

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{i}]\times\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\mathfrak{k}\right)$$
$$+[\mathfrak{a}\,\mathfrak{j}]\times\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\mathfrak{i} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\mathfrak{k}\right)$$
$$+[\mathfrak{a}\,\mathfrak{k}]\times\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\mathfrak{i} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\mathfrak{j} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\mathfrak{k}\right)$$
$$= \left[(\mathfrak{j}\,a_3 - \mathfrak{k}\,a_2),\ \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\mathfrak{k}\right)\right] + [\ldots] + [\ldots]$$
$$= -a_3\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathfrak{k} - a_2\frac{\partial\xi}{\partial x}\mathfrak{j} + a_2\frac{\partial\eta}{\partial x}\mathfrak{i} + a_3\frac{\partial\zeta}{\partial x}\mathfrak{i} + \ldots + \ldots\,,$$

woraus sich als Komponente in der i-Richtung der gleiche Wert ergibt.

Endlich ist:

$$\Phi_c^r \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\, \Phi^r = [V\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{a}]]_a$$
$$= \Phi_c^s\, \mathfrak{a} - \mathfrak{a}\, \Phi_s^s .$$

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

In unserem Verlage erscheint ferner die

Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leichtfaßliche Darstellung des Stoffes auch für den Nichtfachmann verständlich sind. In systematisch sich aufbauenden, selbständigen Einzeldarstellungen bildet das Unternehmen einen einheitlich angelegten Lehrgang der gesamten Mathematik, von den ersten Anfangsgründen der Arithmetik und Algebra bis zur höheren Mathematik.

Ausführliche Verzeichnisse unberechnet und postfrei.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände.

Ackerbau- u. Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin u. Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 282.

Agrikulturchemie. I: Pflanzenernährung v. Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Kontrollwesen, Das, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Akustik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik u. Akustik. Von Dr. Gust. Jäger, Prof an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— **Musikalische,** v. Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Univers. Berlin. Mit 35 Abbild. Nr. 21.

Algebra. Arithmetik u. Algebra v. Dr. H. Schubert, Prof. a. d. Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Alpen, Die, von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 129.

Altertümer, Die deutschen, v. Dr. Franz Fuhse, Direktor d. städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abb. Nr. 124.

Altertumskunde, Griechische, von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearb. von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

— **Römische,** von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollb. Nr. 45.

Analyse, Techn.-Chem., von Dr. G. Lunge, Prof. a. d. Eidgen. Polytechn. Schule i. Zürich. Mit 16 Abb. Nr. 195.

Analysis, Höhere, I: Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— — Repetitorium und Aufgabensammlung z. Differentialrechnung v. Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

— — II: Integralrechnung. Von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium i. Stuttgart. M. 89 Fig. Nr. 88.

Analysis, Höhere, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

— **Niedere,** von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Mit 5 Fig. Nr. 53.

Arbeiterfrage, Die gewerbliche, von Werner Sombart, Prof. an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Arbeiterversicherung, Die, v. Prof. Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Arithmetik und Algebra von Dr. Herm. Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

— — Beispielsammlung zur Arithmetik u. Algebra v. Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Armenwesen u. Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber in Bonn. Nr. 346.

Ästhetik. Allgemeine, von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an d. Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. v. Dr. W. F. Wislicenus, Prof. a. d. Univers. Straßburg. Mit 36 Abb. u. 1 Sternk. Nr. 11.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbild. Nr. 91.

Aufgabensammlg. z. Analyt. Geometrie d. Ebene v. O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 32 Figuren. Nr. 256.

— — **d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 8 Fig. Nr. 309.

— **Physikalische,** v. G. Mahler, Prof. der Mathem. u. Physik am Gymnas. in Ulm. Mit d. Resultaten. Nr. 248.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate von Wilh. Weitbrecht, Prof. der Geodäsie in Stuttgart. Mit 15 Figuren und 2 Tafeln. Nr 302.

Baukunst, Die, des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbild. Nr. 74.

Betriebskraft, Die zweckmäßigste, von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I. Teil: Die mit Dampf betriebenen Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 14 Abbild. Nr. 224.

— — 2. Teil: Verschiedene Motoren nebst 22 Tabellen über ihre Anschaffungs- und Betriebskosten. Mit 29 Abbild. Nr. 225.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbild. Nr. 96.

Biologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Biologie der Tiere, Abriß der, von Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor d. Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Mit 16 Abbild. Nr. 303.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Rob. Stern, Oberlehrer der Öffentl. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

— **Analytische,** von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— — II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalle. — Metalloide.

Chemie, Geschichte der, von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— **II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart.** Nr. 265.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — **III:** Karbocyklische Verbindungen. Nr. 198.

— — **IV:** Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

— **Physiologische,** von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— — II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Dampfturbinen, Die, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ingenieur Hermann Wilda in Bremen. Mit 89 Abbild. Nr. 274.

Dichtungen a. mitteldeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 187.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. a. Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Mit 46 Fig. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenbetonbau, Der, von Reg.-Baumeister Karl Rößle. Mit 75 Abbildungen. Nr. 349.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hüttening. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Eisenkonstruktionen im Hochbau von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Fig. Nr. 322.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrochemie von Dr. Heinr. Danneel, Privatdozent in Breslau. I. Teil: Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. M. 47 Fig. Nr. 196.

— — II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Fig. Nr. 197.

— — III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Fig. Nr. 198.

Entwicklung, Die, der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferdinand Tönnies. Nr. 363.

Epigonen, Die, des höltyschen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 18. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied des Königl. Preußischen Meteorologischen Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Taf. Nr. 175.

Ethik von Professor Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Professor an der Forstakademie Eisenach. 1. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 268.

— — 2. Teil. Mit 50 Abbild. Nr. 269.

Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 6 Abbild. u. 12 Tab. Nr. 333.

Familienrecht. Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Nr. 305.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei u. ihre Hilfsstoffe v. Dr. Wilh. Massot, Lehrer a. d. Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie i. Krefeld. M. 28 Fig. Nr. 186.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Feldgeschütz, Das moderne, I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850 bis 1890, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— — II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbild. Nr. 307.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Kellstab in Berlin. Mit 47 Fig. und 1 Tafel. Nr. 155.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. M. 56 Fig. Nr. 288.

Fette, Die, und Öle sowie die Seifen- u. Kerzenfabrikation und die Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun in Berlin. I: Einführung in die Chemie, Besprechung einiger Salze und die Fette und Öle. Nr. 335.

— — II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbild. Nr. 336.

— — III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Finanzwissenschaft v. Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 148.

Fische. Das Tierreich IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Mit 37 Abbild. Nr. 356.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Prof. a. Gymn. in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Fremdwörterbuch, Deutsches, von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Gaskraftmaschinen, Die, von Ing. Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 52 Figuren. Nr. 316.

Gasgeräte von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbild. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbild. Nr. 24.

— s. auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Taf. mit über 50 Fig. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Fig. Nr. 65.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Geometrie, Analyt., Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie der Ebene von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 32 Fig. Nr. 256.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbild. Nr. 89.

— — **Aufgabensammlung z. Analyt. Geometrie d. Raumes** von O. Th. Bürklen, Prof. a. Realgymn. i. Schwäb.-Gmünd. M. 8 Fig. Nr. 309.

— **Darstellende**, von Dr. Robert Haußner, Prof. an der Univ. Jena. I. Mit 110 Fig. Nr. 142.

— **Ebene**, von C. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive**, in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit 91 Fig. Nr. 72.

Geschichte, Badische, von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim und Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 280.

— **der Christlichen Balkanstaaten** (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

— **Bayerische**, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.

— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

— **Deutsche, I: Mittelalter** (bis 1519) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 83.

— — **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Dr. F. Kurze, Professor am Königl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 84.

— — **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648—1806) von Dr. F. Kurze, Prof. am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 85.

— — siehe auch: Quellenkunde.

Geschichte, Französische, von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Universf. Berlin. Nr. 85.

— **Griechische**, von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der deutschen Universf. Prag. Nr. 49.

— **des 19. Jahrhunderts** v. Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universf. Bonn. 1. Bdchn.: 1800—1852. Nr. 216.

— — 2. Bdchn.: 1853 bis Ende d. Jahrh. Nr. 217.

— **Israels** bis auf die griech. Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

— **Lothringens**, von Dr. Herm. Derichsweiler, Geh. Regierungsrat in Straßburg. Nr. 6.

— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Prof. a. d. Universf. München. M. 6 Bild. u. 1 Kart. Nr. 43.

— **Oesterreichische**, I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Professor Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtaf. Nr. 104.

— — II: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648), von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 8 Stammtafeln. Nr. 105.

— **Polnische**, v. Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

— **Römische**, von Realgymnasial-Dir. Dr. Jul. Koch in Grunewald. Nr. 19.

— **Russische**, v. Dr. Wilh. Reeb, Oberl. am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

— **Sächsische**, von Professor Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.

— **Schweizerische**, von Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

— **Spanische**, von Dr. Gustav Diercks. Nr. 266.

— **Thüringische**, von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.

— **der Chemie** siehe: Chemie.

— **der Malerei** siehe: Malerei.

— **der Mathematik** s.: Mathematik.

— **der Musik** siehe: Musik.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Geschichte der Pädagogik siehe: Pädagogik.
— **der Physik** siehe: Physik.
— **des deutschen Romans** s.: Roman.
— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.
— **des deutschen Unterrichtswesens** siehe: Unterrichtswesen.
— **des Zeitungswesens** s.: Zeitungswesen.
— **der Zoologie** siehe: Zoologie.

Geschichtswissenschaft, Einleitung in die, von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 270.

Geschütze der Fußartillerie, Die Entwicklung der. Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 v. Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

Gesetzbuch, Bürgerliches, siehe: Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbehygiene von Dr. E. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Prof. an d. Handelshochschule Berlin. I. II. Nr. 208. 204.

Gewichtswesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Gleichstrommaschine, Die, von C. Kinzbrunner, Ingenieur und Dozent für Elektrotechnik an der Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machaček in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Taf. Nr. 154.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
— **Griechische**, I: Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
— — II: Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Prof. an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
— **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Prof. Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Univers. Rostock. Nr. 1.
— **Russische**, von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 66.
— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 182.
— **Englische**, von E. E. Whitfield, M. A., Oberlehrer an King Edward VII Grammar School in King's Lynn. Nr. 237.
— **Französische**, von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique. Nr. 183.
— **Italienische**, von Prof. Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.
— **Russische**, von Dr. Theodor von Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.
— **Spanische**, von Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.

Handelspolitik, Auswärtige, von Dr. Heinr. Sieveking, Prof. an der Univers. Marburg. Nr. 245.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Handelswesen, Das, von Dr. Wilh. Lexis, Prof. a. d. Univers. Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— — II: Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Harze, Lacke, Firnisse von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle III.) Nr. 337.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz. a. d. Univers. Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting in Düsseldorf. I.: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Fig. Nr. 342.

— — II.: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 82.

— siehe auch: Mythologie.

Hygiene des Städtebaus, Die, von Professor H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 30 Abb. Nr. 348.

— **des Wohnungswesens** von Prof. H. Chr. Nußbaum in Hannover. Mit 5 Abbild. Nr. 363.

Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Taf. Nr. 205.

— — II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Taf. Nr. 206.

— — III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Industrie der Silikate, der künstl Bausteine und des Mörtels I: Glas und keramische Industrie von Dr. Gustav Rauter in Charlottenburg. Mit 12 Taf. Nr. 283.

— — II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 284.

Infektionskrankheiten, Die, und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildung. u. einer Fiebertafel. Nr. 327

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 89 Fig. Nr. 88.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Integralrechnung v. Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymn. in Stuttgart. Mit 50 Fig. Nr. 147.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo und F. Sauter, Prof. am Realgymn. in Ulm, neu bearb. von Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. Mit 70 Abbild. Nr. 80.

Kirchenlied. Martin Luther, Thomas Murner, und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. und 2 Fig. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univers. Berlin. Nr. 156.

Kolonialrecht, Deutsches, von Dr. H. Edler von Hoffmann, Privatdoz. an der Univers. Göttingen. Nr. 318

Kompositionslehre. Musikalische Formenlehre von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Kontrollwesen, Das agrikulturchemische, von Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 804.

Körper, der menschliche, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbild. und 1 Taf. Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Univers. Straßburg. Mit 190 Abbild. Nr. 210.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Univers. Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 180.

Kulturgeschichte, Deutsche, von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. und Beilagen. Nr. 75.

Kurzschrift siehe: Stenographie.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Prof. am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profil. Nr. 63.

Landeskunde u. Wirtschaftsgeographie d. Festland. Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an d. Handels-Hochschule in Köln. Mit 8 Abbild., 6 graphisch. Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profil, Abbild. und 1 Karte. Nr. 199.

Landeskunde des Königreichs Bayern von Dr. W. Götz, Prof. an d. Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Britisch-Nordamerika** von Prof. Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbild. und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **der Iberischen Halbinsel** von Dr. Fritz Regel, Prof. an der Univers. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbild. im Text und 1 Karte in Farbendruck. Nr. 285.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Univers. Berlin. Mit 10 Textillustration. und 1 Karte. Nr. 244.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Professor Dr. A. Philippson in Halle a. S. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** v. Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnas. in Plauen. Mit 12 Abbild. u. 1 Karte. Nr. 258.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** v. Dr. Kurt Hassert, Prof. d. Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 157.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbild. u. 1 Karte. Nr. 345.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. 1 Teil: Öffentliches Leben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 93.

— — 2. Teil: Privatleben. Mit zahlreichen Abbildungen. Nr. 328.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Prof. Dr. W. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmäler des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

— **des 16. Jahrhunderts I: Martin Luther, Thom. Murner u. das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts.** Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— — **II: Hans Sachs.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

— — **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 102.

— II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken, von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Nr. 168.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Univers. Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Prof. an der Techn. Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

Literaturgeschichte, Deutsche, des 19. Jahrhunderts v. Carl Weitbrecht, Prof. an d. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

— **Englische,** von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— — Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286. 287.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. Nr. 125.

— **Nordische,** I. Teil: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an d. Univers. Rostock. Nr. 254.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Slavische,** von Dr. Josef Karásek in Wien. 1. Teil: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— — 2. Teil: Das 19. Jahrh. Nr. 278.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie v. Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Prof. an d. Univers. Breslau. Nr. 107—111.

Mälzerei. Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. P. Dreverhoff, Direktor d. Öffentl. u. l. Sächs. Versuchsstat. für Brauerei u. Mälzerei, sowie der Brauer- u. Mälzerschule zu Grimma. Nr. 308.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. 8.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. August Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Materialprüfungswesen. Einführ. i. d. mod. Technik d. Materialprüfung von K. Memmler, Diplomingenieur. Ständ. Mitarbeiter a. Kgl. Material-Prüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel f. Festigkeitsversuche. Mit 58 Fig. Nr. 311.

— — II: Metallprüfung u. Prüfung v. Hilfsmaterialien d. Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Fig. Nr. 312.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Taf. Nr. 112.

Messungsmethoden, Physikalische v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr. 301.

Metalle (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metallurgie von Dr. Aug Geitz, diplom. Chemiker in München, I. II. Mit 21 Fig. Nr. 313. 314.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Univers. Innsbruck. Mit 49 Abbild. und 7 Taf. Nr. 54.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Prof. an der Univers. Bonn. Mit 130 Abbild. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie u. Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Münzwesen. Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Prof. an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Zwei Bändchen. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121 und 347.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikästhetik von Dr. Karl Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Musikgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 239.

— **des 19. Jahrhunderts** von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Germanische, von Dr. Eugen Mogk, Prof. an der Univers. Leipzig. Nr. 15.

— **Griechische und römische,** von Dr. Herm. Steuding, Prof. am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.

— siehe auch: Heldensage.

Nadelhölzer, Die, von Dr. F. W. Neger, Prof. an der Kgl. Forstakad. zu Tharandt. Mit 85 Abb., 5 Tab. und 3 Karten. Nr. 355.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbild. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nöt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik m kurz. Wörterbuch v. Dr. W. Golther Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Fig. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Prof. Dr. W. Rein, Direktor des Pädagog. Seminars an der Univ. Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Univ. Graz. Mit 87 Abbild. Nr. 95.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Fig. Nr. 260.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Oberl. an der Baugewerkschule Köln. Mit 88 Abbild. Nr. 57.

Petrographie von Dr W. Bruhns, Prof. a. d. Univers. Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbild. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzenkrankheiten v. Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Taf. u. 45 Abbild. Nr. 310.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakad. Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbild. Nr. 158.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 231.

Philosophie, Einführung in die, von Dr. Max Wentscher, Prof. a. d. Univers. Königsberg. Nr. 281.

— Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie, Die. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— **Geschichte der**, von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.

— — II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Fig. Nr. 294.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Prof. d. Mathem. u. Physik am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Mit 65 Fig. Nr. 136.

Physikalische Messungsmethoden v. Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Fig. Nr 301.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Taf. Nr. 116.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Prof. a. d. Univ. München. Nr. 40.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Fig. Nr. 98.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der kgl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit zahlr. Abbild. Nr. 290.

Quellenkunde zur deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Univers. Tübingen. 2 Bde. Nr. 279. 280.

Radioaktivität von Chemiker Wilh. Frommel. Mit 18 Abbild. Nr. 317.

Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Recht d. Bürgerlich. Gesetzbuches. Zweites Buch: Schuldrecht I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 328.

— — II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse v. Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Prof. an der Univers. Göttingen. Nr. 305.

Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg, Privatdoz. an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Rechtsschutz, Der internationale gewerbliche, von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Mit einer Taf. Nr. 61.

Religionsgeschichte, Alttestamentliche, von D. Dr. Max Löhr, Prof. an der Univers. Breslau. Nr. 292.

— **Indische**, von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 88.

— — siehe auch Buddha.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Renaissance. Die Kultur d. Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz. an der Univ. Wien. Nr. 189.

Roman. Geschichte d. deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Univers. Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Säugetiere. Das Tierreich I: Säugetiere von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

Schattenkonstruktionen v. Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Graz. Mit 67 Abbild. Nr. 151.

Schule, Die deutsche, im Auslande, von Hans Amrhein in Halle a. S. Nr. 259.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminaroberlehrer in Annaberg. Nr. 50.

Seifenfabrikation, Die, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation von Dr. Karl Braun in Berlin. (Die Fette und Öle II.) Mit 25 Abbild. Nr. 336.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Univers. Breslau. Nr. 138.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Kgl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Germanische, v. Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 288.

— **Indogermanische,** v. Dr. R. Meringer, Prof. a. d. Univ. Graz. Mit einer Taf. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Univers. Wien. I: Lautlehre u. Wortlehre I. Nr. 128.

— — II: Wortlehre II u. Syntax. Nr. 250.

— **Semitische,** von Dr. C. Brockelmann, Prof. an der Univers. Königsberg. Nr. 291.

Staatslehre, Allgemeine, von Dr. Hermann Rehm, Prof. an d. Univ. Straßburg i. E. Nr. 358.

Staatsrecht, Preußisches, von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298 u. 299.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, a. o. Prof. an der Univers. Wien. Mit 2 Karten und 2 Taf. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper v. W. Hauber, Diplom.-Ing. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Fig. Nr. 179.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Mitglied des Kgl. Stenogr. Instituts Dresden. Nr. 246.

— Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang v. Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses Oranienstein. Nr. 86.

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Prof. an der Univers. Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

— **Mechanische,** von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke i. Braunschweig. Nr. 340/41.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Lud. Rellstab. M. 19 Fig. Nr. 172.

Testament. Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk in Jena. Nr. 272.

— Die Entstehung des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

— **Neutestamentliche Zeitgeschichte** I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Privatdoz. in Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— — II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Thermodynamik (Technische Wärmelehre) v. K. Walther u. M. Röttinger, Dipl.-Ingenieuren. M. 54 Fig. Nr. 242.

Tierbiologie siehe: Biologie d. Tiere.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Univers. Graz. Mit 78 Abbild. Nr. 60.

Tierre[illegible], Das, I: Säugetiere von Ob[illegible]dienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— — IV: Fische von Privatdozent Dr. Max Rauther in Gießen. Nr. 356.

Tierzuchtlehre, Allgemeine u. spezielle, v. Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Fig. Nr. 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

— **Geschichte des deutschen Unterrichtswesens** von Prof. Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Kgl. Gymnasiums zu Luckau. I. Teil: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— — II. Teil: Vom Beginn d. 19. Jahrh. bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 53 Abbild. Nr. 42.

Urheberrecht, Das, an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

— **Das deutsche,** an literarischen, künstlerischen u. gewerblichen Schöpfungen, mit besond. Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Vektoranalysis v. Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Univers. Berlin. Mit 11 Fig. Nr. 354.

Sammlung Göschen

In elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B.

Versicherung iur. Paul H. Versicherung Handelshoch

Völkerkunde landt, k. u. Sammlung museums u. Wien. Mit

Volksbibliot hallen), ih waltung v bibliothekar

Volkslied, gewählt ur Jul. Sahr.

Volkswirtsch Johs. Fuch Freiburg i.

Volkswirtsch sident Dr. lin. Nr. 1

Walthariliе der Urschr von Prof. a. Realgy

Walther v Auswahl dichtung. einem Wö Prof. a. d Techn. Ho

Warenkun Professor akademie. Waren.

— II. Teil: 36 Abbild.

Warenzeichenschutz, Der, von J. Neuberg, Kais. Regierungsrat, Mitglied d. Kais. Patentamts z. Berlin. Nr. 360.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univers. Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wärmelehre, Technische, (Thermodynamik) von R. Walther u. [illegible] Ingenieure.

Zeitungswesen, Das moderne, (Syst. d. Zeitungslehre) v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

— **Geschichte des,** von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Weitere Bände erscheinen in rascher Folge.

MAR 21 1910

SEP 19 1917